المنهج الكمي

في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى

Quantitative Approach to Optimal Managerial Decision Making

الدكتور مؤيد الفضل



المنهج الكمي في:

اتخاذ القرارات الإدارية المثلى

Quantitative Approach to:

OPTMAL MANAGERIAL DECISION MAKING

تأليـــــف

د. مؤيد عبد الحسين الفضل



تليجرام

غواص في بحر الكتب

تليجرام

هنا

سور الأزبكية

المحتويات

مقدمة

كتابنا هذا يأتي لإعادة صياغة وتطوير المادة العلمية الواردة في مؤلفنا السابق الموسوم "نمذجة القرارات الإدارية" Managerial Decision Modeling الذي صدر من دار اليازوري في عام 1999، وقد جاء في هذه المادة العلمية التي بين يدي القارئ الكريم تعديلات وإضافات تتلائم والتطورات التي دخلت على المنهج الكمي لإدارة الأعمال، وكذلك تم استيعاب ماأفرزته مشكلات العصر المتمثلة بالاستغلال الأمثل للموارد المادية والبشرية والحفاظ على الميزة التنافسية، مع بيان تأثير ذلك في عملية اتخاذ القرارات الإدارية التي من شأنها أن تحقق النتائج المثلى المطلوبة، وقد تم التأكيد على حالة الأمثلية في معالجة المشكلات التي يمكن أن تواجه منظمات الأعمال الإنتاجية والخدمية.

جاءت المادة العلمية لكتابنا هذا في ستة فصول. خصص الأول منها للمفاهيم العامة في المنهج الكمي لإدارة الأعمال ونماذج اتخاذ القرار، والفصل الثاني خصص لاتخاذ القرار الأمثل باستخدام نماذج البرمجة الخطية، في حين خصص الفصل الثالث لدراسة عملية اتخاذ القرار الأمثل باستخدام نماذج البرمجة الخطية المحورة. والفصل الرابع تضمن نماذج النقل الاعتيادية، في حين أن نماذج النقل المحورة جاءت في الفصل الخامس. الفصل الأخير من كتابنا هذا هو الفصل السادس، خصص لدراسة البرمجة الديناميكية وتطبيقاتها المختلفة في اتخاذ القرار.

نأمل أن ينال كتابنا هذا رضى القارئ الكريم.

ومن الله التوفيق

المؤلف

الفصل الأول
مفاهيم عامة في المنهج الكمي ونماذج اتخاذ القرار

1

الفصل الأول

مفاهيم عامة في المنهج الكمي ونماذج اتخاذ القرار

1.1. مفهوم ومداخل دراسة إدارة الأعمال

إن تحديد مفهوم واضح لإدارة الأعمال يتطلب في البداية توضيح ما هو المقصود بمفهوم الإدارة أولاً، وهذه يقودنا إلى التمييز بين مصطلح (Administration) ومصطلح (Management)، إذ أن كل منهما يقابل تسمية (إدارة) إلا أن مصطلح (Administration) يشير إلى المهام الأساسية التي تنهض بها الإدارة العليا على مستوى منظمة الأعمال أو القطاع وما هو أعلى من ذلك، ومن هنا كان لدينا:

- Business Administration مصطلح يشير إلى إدارة الأعمال.
- Public Administration مصطلح يشير إلى الإدارة العامة.

أما مصطلح Management فهو يشير إلى الجانب العملي والتنفيذي لما يقوم به المدير في المنظمة.

وتأسياً على ما تقدم وفي صدد التمييز بين المنظمات من خلال الأهداف، فإن تحقيق المصلحة أو الخدمة العامة للمجتمع (بغض النظر عن العوائد والأرباح) هو من أهداف المنظمات التي تمارس فيها الإدارة العامة حيث يكون الهدف رقم واحد هو تحقيق مصلحة عامة للمجتمع والهدف التالي هو البحث عن العوائد اللازمة لاستمرارية المنظمة، أما إذا كان هدف المنظمة (بالتحديد ما يسمى

بمنظمة الأعمال) هو تحقيق الأرباح بالدرجة الأولى والعمل وفق مؤشرات الجدوى الاقتصادية من خلال الموازنة بين عوامل الربح والخسارة، فإن هكذا نوع من الإدارة تسمى بإدارة الأعمال Business Administration، وهنالك تعاريف عديدة في هذا الصدد، يمكن إجمالها على النحو التالي:

1. إدارة الأعمال هي عملية توجيه وتنسيق الجهود نحو تحقيق الأهداف الاقتصادية المطلوبة من قبل منظمة الأعمال.
2. إدارة الأعمال هي عملية تنظيم والتنسيق للجهود والموارد الاقتصادية والرقابة عليها لأجل تحقيق الأهداف التي وجدت من أجلها المنظمة وبالتالي تحقيق رغبات القائمين عليها أو المالكين لها.
3. إدارة الأعمال هي عملية إنجاز المهام والأهداف عن طريق توجيه جهود الآخرين للحصول على أفضل النتائج بأقل الجهود.

في ضوء هذه التعاريف والأفكار يكون أمام المهتمين بدراسة إدارة الأعمال اتجاهات واهتمامات مختلفة، حيث أن البعض يمكن أن يهتم بمفهوم إدارة الأعمال مع التركيز على المهام والأعباء التي سوف تناط بالمدير لتحقيق هدف المنظمة، في حين يركز الآخر على الأثر القانوني لممارسة كل وظيفة من وظائف المدير أو ما يسمى بوظائف المنشأة، في حين يركز الآخر على كيفية معالجة إنجاز المهام ومعالجة المشاكل من خلال صياغة وبناء النماذج الرياضية وإجراء التحليلات الكمية المختلفة للنتائج التي يتم الحصول عليها، وهكذا نجد أن هذه الاهتمامات المتباينة تفتح المجال أمام المهتمين

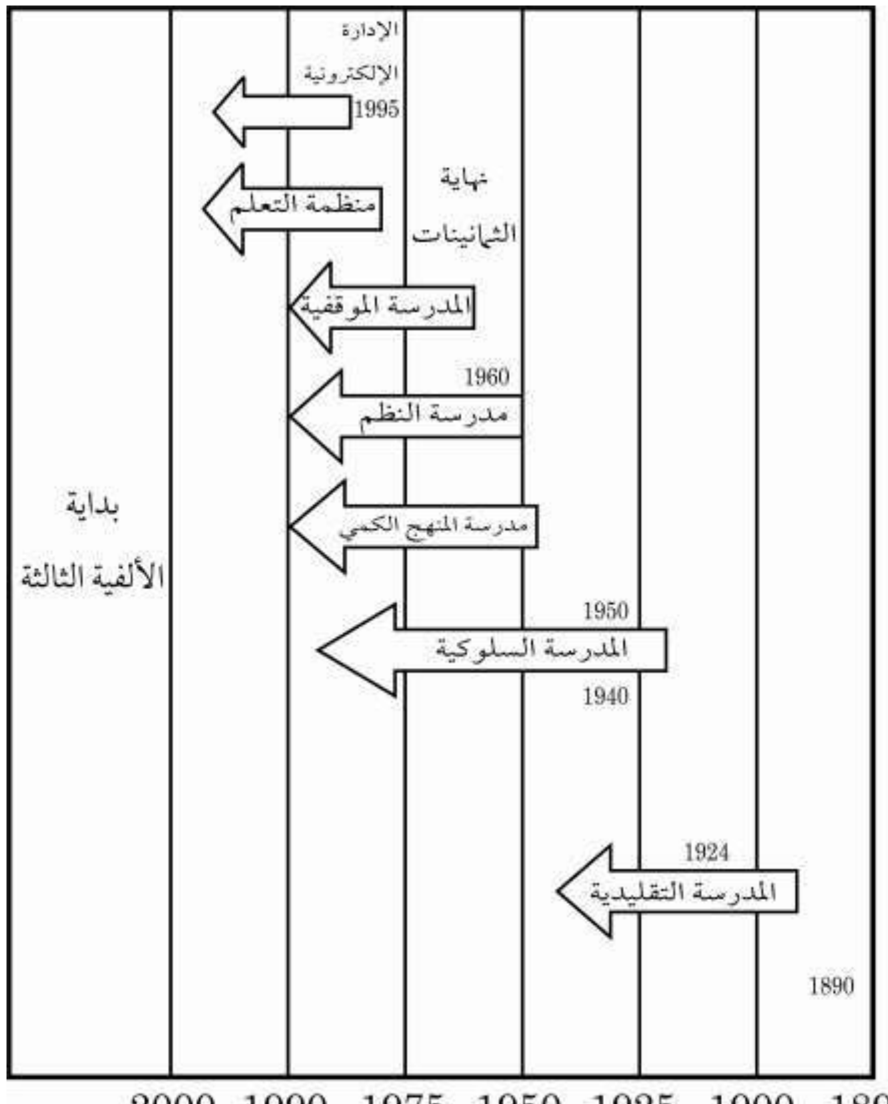
بالفكر الإداري للاجتهاد والتخصص في طرق وأساليب دراسة إدارة الأعمال. حيث ورد في طروحات الفكر الإداري مداخل عديدة ومتنوعة، بدأت من سنة 1890 حيث ظهرت المدرسية التقليدية وامتدت هذه التطورات مروراً بعدد من المدارس الفكرية وذلك كما هو واضح في الشكل رقم (1-1)، ومن هذا الشكل يتضح المدخل الكمي الذي بدأ في سنة 1950 وامتد بعد ذلك وتطور على يد كثير من الرواد في فترة الأربعينات وما تلاها من حقب زمنية بشكل مرادف لظهور المداخل والمدارس الأخرى مثل مدرسة النظم والمدرسة الموقفية وغير ذلك[1]:

---

(1) لمزيد من التفاصيل انظر:

Richard L.Daft (management) Dryden press fort worth ,Western college finishing Australia 2001. p.47.

شكل رقم (1-1): تطور مداخل ومدارس الفكر الإداري مع بيان موقع المدخل الكمي فيها



يرد في طروحات فكرية أخرى تسميات مغايرة لما ورد في الشكل السابق من مداخل ومدارس فكرية حيث جاءت هذه المداخل من حقب زمنية مختلفة، ولكونها الأقرب إلى اهتماماتنا في هذا الكتاب ومن أجل بيان الفروقات بينها وبين المنهج الكمي، فإننا نعرضها أدناه على النحو التالي:

1- مدخل وظائف المدير Management Functions Approach.

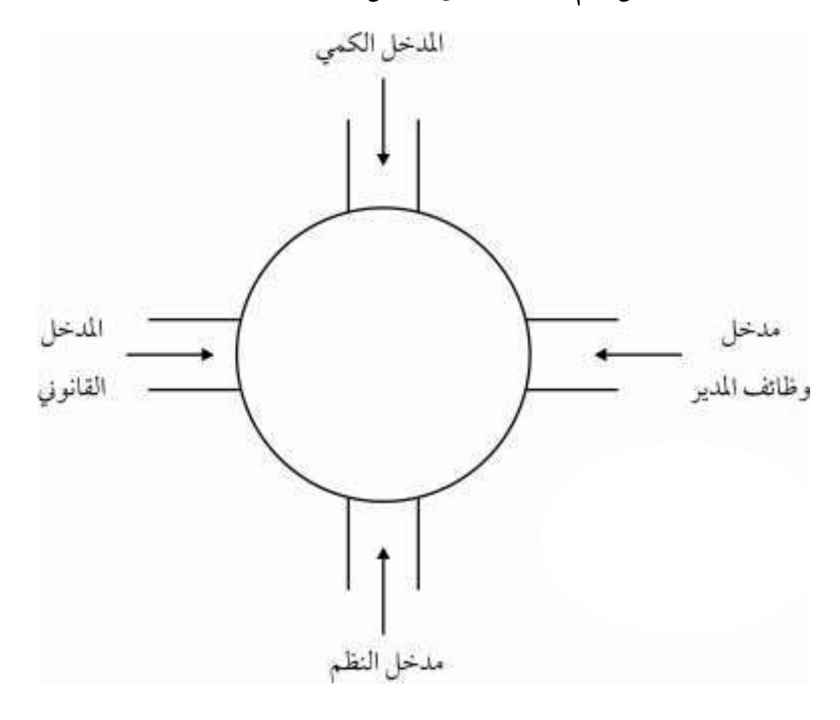
2- مدخل النظم Systems Approach.

3- المدخل القانوني Legal Approach.

4- المدخل الكمي Quantitative Approach.

وفيما يلي توضيح لكل واحد من هذه المداخل مع التركيز على المدخل الكمي باعتباره الأساس العلمي لدراستنا هذه.

شكل رقم (1-2) بعض مداخل دراسة إدارة الأعمال



مدخل وظائف المدير Management Functions Approach:

إن دراسة إدارة الأعمال بموجب هذا المدخل تبحث في كل وظيفة من وظائف المدير المعروفة وهي التخطيط والتنظيم والقيادة والرقابة وتنمية المدراء، حيث يتم التعرف على طبيعة المهام والأعباء التي تمارس من قبل المدير في كل واحدة من هذه الوظائف ودورها في تحقيق الأهداف القائمة وراء قيام منظمة الأعمال.

مدخل النظم Systems Approach:

يمثل هذا المدخل اتجاهاً حديثاً في فكر إدارة الأعمال حيث بموجبه يتم النظر إلى منظمة الأعمال على أنها منظومة System تتكون من أجزاء فرعية Subsystem وهي الوظائف الإدارية التي يمارسها المدير مثل التخطيط والتنظيم والقيادة وما إلى ذلك، لذلك ينظر إليها على أنها منظومات فرعية مشتقة من منظومة اتخاذ القرار الرئيسية في منظمة الأعمال.

وعلى الرغم من التاريخ الطويل للفكر الخاص لمفاهيم النظام والأنظمة، إلا أن الاستفادة من هذا المنهج أصبح مقبولاً من قبل المتخصصين في إدارة الأعمال لم يتم إلا قبل فترة حديثة نسبياً. ومن الصعب تحديد نقطة الانعطاف نحو نهج الأنظمة إلا أننا نستطيع الإشارة إلى بداية الستينات من القرن العشرين كفترة واضحة لذلك.

المدخل القانوني Legal Approach:

بموجب هذا المدخل تكون الاهتمامات منصبه على الآثار القانونية لكافة النشاطات والمهام الإدارية. وكذلك على تشخيص الأثر القانوني للوظيفة وأداء

الفرد في ظل التفاعل مع المؤثرات الداخلية والخارجية. حيث من المعلوم أن ممارسة النشاطات والمهام في أية منظمة يتطلب تفويض الصلاحيات وتحديد المسؤوليات، وأن لأية صلاحية وأية مسؤولية هنالك آثار ومحددات قانونية تنظم وتوضح الكيفية التي بموجبها يتم تعريف النشاطات المختلفة مع بيان أية عقوبات أو التزامات جزئية مقابل النشاط المنحرف أو الإخفاق في أداء الأهداف المحددة.

المدخل الكمي Quantitative Approach:

إن هذا المدخل يرتبط بشكل مباشر باستخدام الأرقام والعلاقات الرياضية والأساليب الكمية المختلفة لتحليل وتفسير الكثير من مشكلات إدارة الأعمال، وبالنظر لأهمية هذا المدخل في دراستنا هذه فقد تم تحديد مبحث خاص له لتقديم فكرة عن ظهوره ومفهومه وأهميته لمنظمات الأعمال.

2.1. مفهوم وأهمية المدخل الكمي لدراسة إدارة الأعمال

إن بداية ظهور هذا المدخل في الفكر الإداري واعتماده كمنهج من مناهج دراسة إدارة الأعمال يرتبط مع المحاولات التي بذلها رواد الإدارة العلمية ومنهم فردريك تايلور Fredrek Taylor في بداية القرن العشرين في إدخال الأساليب العلمية في الإدارة. وقد كان الاستخدام الواضح للأفكار والأدوات العلمية الواردة ضمن هذا المنهج في معالجة مشاكل إدارة أعمال المنظمات هو في منتصف الأربعينيات والخمسينيات من القرن العشرين. حيث فرضت الحرب العالمية الثانية حاجة ملحة للدقة في توزيع الموارد المهمة لمختلف العمليات العسكرية.

وبالطريقة الكفؤه لما تتمتع به تلك الموارد من ندرة. إن هذا الأمر دعى القيادة العسكرية البريطانية إلى تشكيل فريق من المتخصصين بعلم الرياضيات والهندسة والفيزياء والاقتصاد وغيرها من التخصصات العلمية. مهمة هذا الفريق هو إجراء بحوث في العمليات العسكرية مع تقديم الحلول المقترحة للقيادة العسكرية للنظر في تنفيذها. وقد أحرز الفريق المذكور في عملية توزيع أنظمة الرادار والمقاومات الأرضية نجاحاً واضحاً مما ساعد البريطانيين في إحراز أفضل النتائج العسكرية. وقد كان ذلك سبباً مهماً في أن تعتمد القيادة العسكرية الأمريكية عند دخولها الحرب إلى تشكيل فريق ومن مختلف التخصصات وعلى غرار ذلك الفريق البريطاني الأول. وكانت النتائج المتميزة التي حققها هذا الفريق في استخدام نماذج الحواسيب الأولى في إجراء العمليات الحسابية المعقدة التي تضمنتها النماذج الرياضية في حل المشاكل التي أوكلت إلى ذلك الفريق العلمي، قد وجهت اهتماماً أكبر إلى هذا المدخل في حل المشكلات التي تواجه مراكز اتخاذ القرار. حيث إن تسمية هذا الفريق للقيام ببحوث العمليات العسكرية قد أوجد الأسلوب العلمي الأفضل لحل المشكلات المتعلقة بتوزيع الموارد المهمة وهذا الموضوع كان السبب في ظهور نوعاً جديداً من العلوم يعرف اليوم باسم بحوث العمليات Operations Research.

بعد انتهاء الحرب العالمية الثانية وما تحقق من نجاحات لفريق بحوث العمليات ظهرت الرغبة في اعتماد هذا المدخل خارج الاستخدامات العسكرية. حيث أن التوجه الصناعي الكبير بعد الحرب والزيادة في حجم وتعقيد وتركيب المنظمات قد أظهر ذات المشكلات المتعلقة بتوزيع الموارد المحدودة والمهمة ولكن

هذه المرة خارج الاستخدامات العسكرية وبالتحديد في ميدان الصناعة والإنتاج الاقتصادي. وهذا ما أقنع معظم المتخصصين في معالجة المشكلات الإدارية بأن المدخل الكمي هو التوجه الملائم للتعامل مع مشاكل إدارة الأعمال في المنظمات المختلفة والصناعية على وجه التحديد. وما إذا جاءت الخمسينيات حتى انتشر استخدام أساليب المدخل الكمي في معالجة مشكلات إدارة الأعمال المختلفة.

لقد ورد في الطروحات الفكرية لإدارة الأعمال توحيد في معنى المدخل مع المنهج، حيث جاء أحدهما مرادفاً للآخر وليحل محله في الكثير في المواقع والمناسبات، وذلك بقدر تعلق الأمر بتوضيح الفكرة أو الطريقة أو أسلوب تفسير المشكلات ومعالجتها.

وفي ضوء ما تقدم إذا أردنا أن نضع مفهوماً واضحاً للمنهج أو للمدخل الكمي فهو ذلك الاتجاه العلمي الذي يهدف إلى تفسير مفاهيم ومشاكل إدارة الأعمال من خلال النماذج الرياضية والأساليب الكمية المختلفة من أجل تحديد حلول معينة للمشاكل التي تواجهها منظمة الأعمال أو لترشيد القرارات المختلفة. ومن الجدير بالذكر هنا، أن استخدام المنهج أو المدخل الكمي في دراسة إدارة الأعمال واجه معوقات واضحة تتركز حول صعوبة التعامل مع الأساليب الرياضية، كما أن ليس جميع مشكلات إدارة الأعمال يمكن صياغتها بنماذج وصيغ رياضية، حيث أن الكثير منها تنطوي على جوانب إنسانية واعتبارات نفسية ومشاعر لا يمكن صياغتها بأرقام ثابتة أو متغيرات كمية. لكن ذلك لم يقلل من أهمية التعامل مع هذا المنهج في إيجاد أفضل الحلول لأعقد المشكلات المتعلقة بالاستخدام الأمثل لموارد المنظمة في سعيها لتحقيق الأهداف المحددة.

3.1. مفهوم وتطور استخدام أساليب المنهج الكمي:

يفهم من مصطلح أساليب المنهج الكمي بأنها مجموعة من الأدوات Tools أو الطرق Methods التي تستخدم من قبل متخذ القرار لمعالجة مشكلة معينة أو لترشيد القرار الإداري المزمع اتخاذه بخصوص حالة معينة، ويفترض في هذه الحالة توفر القدر الكافي من البيانات المتعلقة بالمشكلة، ويتطلب تطبيقها واستخدامها أيضاً تحديد الفرضيات والعوامل المؤثرة بشكل مباشر أو غير مباشر.

وقد عرفها البعض بأنها تلك الأطر الرياضية أو الكمية التي من خلالها يتم استيعاب كافة مفردات المشكلة والتعبير عنها بالاعتماد على العلاقات الرياضية (معادلات أو متباينات) وذلك كخطوة أولى نحو معالجتها وحلها. ويتم تدعيم هذه الأطر الرياضية بالبيانات اللازمة التي يتصف البعض منها في كونها من الثوابت والبعض الآخر من المتغيرات بما يتناسب وطبيعة المشكلة المدروسة. وبذلك تكون هذه الأطر الرياضية بمثابة الوسيلة أو الأسلوب التي من خلالها يتم معالجة المشكلة في الواقع العملي بعد أن يتم استيعاب معظم متغيراتها وثوابتها حتى يتم التوصل في النهاية إلى الحل المطلوب لها.

وعند الحديث عن التطور التاريخي لظهور واستخدام أساليب المنهج الكمي، لا بد من العودة إلى أساليب علم الرياضيات التي منها تم اشتقاق الأساليب الكمية المعتمدة في المنهج المذكور، فالرياضيات كعلم يمتد إلى حقب زمنية قديمة، حيث استخدم في مختلف العلوم، إلا أن ما استخدم منها في مجال الأعمال كان قليلاً، حيث كانت تطبيقاتها الأولى مقتصرة على الحساب لدى رجال الأعمال الأوائل. وفي فترة الثورة الصناعية التي بدأت في انكلترا في منتصف

القرن الثامن عشر، فقد تم إحلال الآلة محل القوة البشرية بعد أن تـم اسـتخدام المحـرك البخـاري سـنة 1764. ولم تسـتخدم الأسـاليب الكميـة في حينهـا لأن الاهتمام في معالجتها كان بطيئاً حتى بداية القرن العشرين عنـدما ظهـرت نتـائج أعمال (F.Taylor). حيث انطوت مبادئـه الأربعـة تأكيـداً واضـحاً عـلى وجـود الطريقـة الأفضـل (The Best Way) في إنجـاز الأعـمال يجـب التوصـل إليهـا وتدريب العمال عليها. ومن هنا فإن الفكر الإداري الـذي قدمـه تـايلور يصـلح لأن يكون قاعدة مهمة للتفكـير وفـق منظـور كمـي قـائم عـلى أسـاس المنطـق والمنهجية العلمية. إن هذه الصفة العلمية في الإدارة كانت تفعـل فعلهـا بشـكل بطيء، وذلك من خلال جهود مبعثرة وفردية على الأخص في العقود الأولى من القرن العشرين. ففي عـام 1912 صـاغ (جـورج بـابكوك G. Babcok) المبـادئ الأساسية لحجم وجبة الإنتاج الاقتصادية والتي طـورت في عـام 1915 بوضـع الصيغة الأولى لنموذج المخزون المتمثل بحجـم الطلبيـة الاقتصـادية مـن قبـل (F.W. Harris) وخلال الحرب العالمية الأولى قام توماس أديسـون (T.Edison) بدراسة الحـرب ضـد الغواصـات محلـلاً أهميـة المسـار المتعـرج (Zigzagging) كطريقة لحماية السفن التجارية. وفي عام 1916 قام المهندس الداينماركي إيرانـك (A.K. Erlang) بتحليل تذبذب الطلـب عـلى تسـهيلات الهـاتف في البـدالات الآلية، فكان أول من طوّر صيغ وقت الانتظار المتوقع لطـالبي النـداءات فكـان عمله هو الأساس في تطوير نماذج خطوط الانتظار. كـما طبـق بعـد ذلـك فـري (T.C.Fry) نظرية الاحتمالات على المشكلات الهندسية عـام 1925 ليسـاهم هـو الآخر في تطوير نظرية خطوط الانتظار.

وفي عام 1924 استخدم دوج (H.F.Dodge) ورومج (H.CRoming) نظرية المعاينة في الرقابة على الجودة لتمكين والتر شويهارت عام 1931 من إدخال الطرق الإحصائية في الرقابة على الجودة. أما تريبت (F.WTrippet) فقد طور استخدام المعاينة الإحصائية لتحديد أوقات العمل القياسية 1934.

لقد كانت هذه المساهمات بمثابة البدايات الحقيقية لاستخدام أساليب المنهج الكمي في معالجة مشكلات القرار. لهذا فإن التطور اللاحق خلال الحرب العالمية الثانية من خلال فريق بحوث العمليات في بريطانيا عام 1939 وفي الولايات المتحدة عام 1942، لم يكن إلا مواصلة لهذه الجهود العلمية من أجل تطوير علم الإدارة. فخلال الحرب العالمية الثانية في 1939 وكما ذكرنا سابقاً تم تشكيل فريق علمي تحت إشراف عالم الفيزياء بلاكيت (Blacketts Circys) مكونة من اختصاصات متعددة من رياضيين وفيزيائيين وعلماء نفس وضباط عسكريين لدراسة المشكلات العسكرية واللوجستية التي تواجه بريطانيا خلال الحرب. ولأن هذه النشاط العلمي كان ينصب على العمليات العسكرية فقد أطلق عليه تسمية: بحوث العمليات (Operational Research). وكما ذكرنا أيضاً، فقد تشكلت مجموعة مشابهة في الولايات المتحدة في عام 1942 لاستخدام الأساليب والنماذج الرياضية في معالجة المشكلات العسكرية. حيث كان هذا النشاط العلمي يسمى في القوة الجوية تحليل العمليات (Operational Analysis) وفي الجيش والقوى البحرية كان يسمى بحوث العمليات أو تقييم العمليات (Operational Evaluation).

ويشير كوك (S.L.cook) في دراسته (تاريخ بحـوث العمليـات) أن باتريـك بلاكيـت كتـب لصـديقه فيليـب مـورس (P.Morse) أسـتاذ الفيزيـاء في معهـد ماساشيوست للتكنولوجيا يخبره عن أهميـة الأسـاليب العلميـة في دعـم الجهـد العسكري ويقترح عليه أن يفعل شيئاً مماثلاً في الولايات. وقد اسـتطاع مـورس أن ينظم مؤتمراً شارك فيه عدد من المسؤولين العسكريين والعلماء لـيطلعهم عـلى ذلك. وهكذا تشكلت مجموعات علماء بحوث العمليات في الولايات المتحدة.

وبعد الحرب العالميـة الثانيـة فـإن مجموعـات بحـوث العمليـات الصـناعية شكلت في كل من الولايات المتحدة وبريطانيا، في محاولـة لنقـل التطـور الجديـد والتطبيق الناجح لأسـاليب العمليـات (أسـاليب المنهج الكمـي) مـن المجـال العسكري إلى مجالات العمـل الصـناعي. والواقـع أن أسـاليب المـنهج الكمـي اسـتمرت بـالتطور بشـكل واضـح ففـي عـام 1947 طـور جـورج دانتـزك (G.B.Dantzing) نموذج البرمجـة الخطيـة/ طريقـة السـمبلكس وهـي الطريقـة الأكثر انتشاراً واسـتخداماً في معالجـة مشـكلات القـرار. وفي عـام 1950 طـور تيربور (G.Terborgh) ودين (J.Dean) نظرية استبدال المعدات. كما تـم تطـوير المخططات الشبكية (طريقة المسار الحرج عـام 1956 وطريقـة تقيـيم ومراجعـة المشروع/ بيرت عام 1958 في الولايات المتحدة).

إن تطور واتساع المنظمات الإنتاجية والخدمية ساهم في تعقد مشكلات القرار مما أدى إلى أن تكون الأساليب التقليدية في معالجة هذه المشـكلات قـاصرة عـن التوصل إلى الحلول الدائمة. فأوجد ذلك الحاجة الحقيقيـة لاسـتخدام أسـاليب المنهج الكمي التي ازدادت أهميتهـا وكفائتهـا وسـهولة اسـتخدامها مـع تطـور

الحاسوب الرقمي عـالي السرـعة (High-Speed Digital Computer) وتطـوير أنظمة وبرامج الحواسيب التي سهلت اسـتخدام هـذه الأسـاليب مـع إمكانيـة الاستغناء عن الخبير المختص بهذه الأساليب. كما إن إدخـال الأسـاليب الكميـة وبحوث العمليات في المناهج الأكاديمية والجامعية منذ أواخر الستينات واتساع نطاق ذلك في الوقت الحـاضر يكشـف عـن التطـور الكبـير الـذي بلغتـه هـذه الأساليب واتساع نطاق استخدامها. واليوم في ظـل عصرـ المعلوماتيـة والإدارة الإلكترونية والاقتصاد الرقمي Digital Economice فـإن الأسـاليب الرياضـية الكمية تعتبر من أكثر الوسائل كفاءة وفاعلية في معاونة متخذ القرار للتوصل إلى أفضل الحلول لمشكلات القرار المختلفة، كما تمثل مصـدراً مهـماً للتطـور الكبـير واللاحق لعلم الإدارة وذلك في إطار منظمات الأعمال المختلفة التـي اسـتجابت لمؤثرات العولمة.

4.1. أنواع أساليب المنهج الكمي وتقسيماتها

ضمن المنهج الكمي لإدارة الأعمال يمكن أن نميز بين الكثير مـن الأسـاليب الكمية التي تستخدم من قبل متخـذ القـرار في مجـال ترشـيد القـرار الإداري أو لغرض حل مشكلة معينة في أحـد مجـالات منظمـة الأعـمال وذلـك مـن أجـل الحصول على الحلول المطلوبة للمشكلة، وهي:

1- الحل الممكن Feasible Solution.

2- الحل الأفضل Best Solution.

3- الحل الأمثل Optimal Solution.

من التقسيمات والتصنيفات لأساليب المنهج الكمي الأكثر شيوعاً، هي تلك التي تعتمد بالشكل رقم (1-3) ومن الشكل المذكور يتضح أن هناك ثلاثة أنواع من الأساليب الكمية الرئيسية، وهي:

أولاً: الأساليب الرياضية وتتضمن ما يلي:

1. الرياضيات الصرفة، وأهمها:

أ. اللوغارتيمات.

ب. الأسس.

ج. الاحتمالات.

د. المصفوفات.

2. الرياضيات التطبيقية، وتتضمن ما يلي:

أ. الرياضيات المالية(والفوائد والاستثمار).

ب. رياضيات التحليل المالي والمحاسبي.

ثانياً: الأساليب الإحصائية، وتتضمن ما يلي:

1. الإحصاء الوصفي، ويشمل:

أ. أساليب عرض البيانات.

ب. العينات وأساليب المعاينة.

2. الإحصاء الاستدلالي، ويشمل:

أ. مقاييس النزعة المركزية.

ب. مقاييس التشتت.

3. نماذج التوقع والأرقام القياسية.

ثالثاً: أساليب بحوث العمليات (البحث عن الأمثلية) ويتضمن الفقرات التالية:

1. البرمجة الخطية Linear Programming وتتضمن الفقرات التالية:

أ. صياغة النموذج الرياضي Model Formulation

ب. الطريقة البيانية Graphical Method

ج. الطريقة الجبرية Algebric Method

د. النماذج الرياضية الأساسية للبرمجة الخطية وهي:

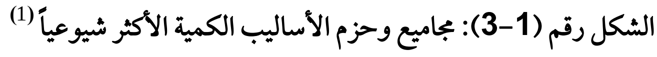
- النموذج العام للبرمجة General Form of linear Programming
- الصيغة القانونية للبرمجة الخطية Canonical Form of linear Programming
- الصيغة القياسية للبرمجة الخطية Standard Form of linear Programming

هـ- الطريقة العامة Simplex Method

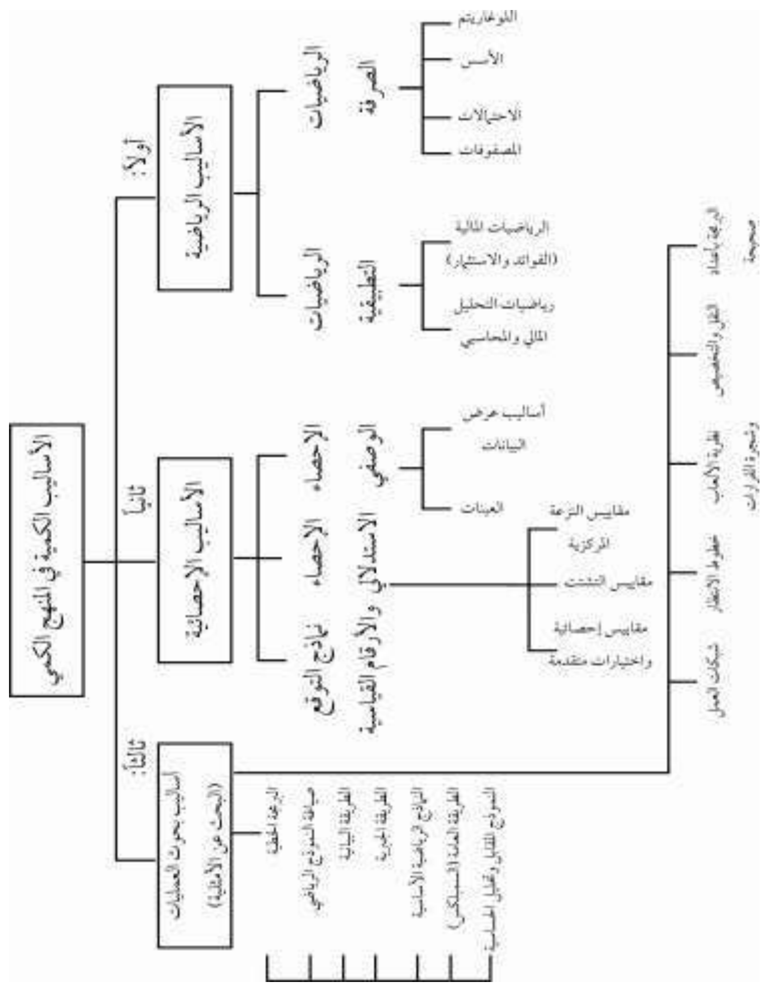
و. النموذج المقابل وتحليل الحساسية Duality and Sensitivity Analysis

2. البرمجة بإعداد صحيحة Integer Programming

3. النقل والتخصيص Transportation and Assingment



الشكل رقم (1-3): مجاميع وحزم الأساليب الكمية الأكثر شيوعاً [1]



(1) يعتمد المؤلف هذا النموذج في معظم مؤلفاته الواردة ضمن المنهج الكمي لإدارة الأعمال. لمزيد من التفاصيل انظر مؤلفنا الموسوم:

- المدخل إلى: الأساليب الكمية في التسويق، إصدار دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان، 2007.
- المنهج الكمي في إدارة الأعمال، إصدار مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان، 2006.
- الأساليب الكمية والإحصائية، إصدار مجمع المحاسبين القانونيين، بإشراف مؤسسة طلال أبو غزاله في عمان، ومعتمد من جامعة Cambridge ومنظمة اليونسكو التابعة للأمم المتحدة، 2007.

4. نظرية الألعاب وشجرة القرارات — Games Theory and Decisions Tree
5. السيطرة على الخزين — Inventory Control
6. خطوط الانتظار — Queuing Theory
7. شبكات العمل — Networks

ومهما كان نوع التقسيم المعتمد للأساليب الكمية، فإنها توظف في عملية اتخاذ القرارات بالشكل الذي يضمن تحقيق الأهداف المطلوبة والمحددة من قبل منظمة الأعمال. ومن أجل فهم الكيفية التي تتم بها عملية استخدام هذه الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات لا بد وأن نعرض بشكل مفصل الطروحات المتعلقة بمفهوم القرار واتخاذ القرارات الإدارية وأنواع القرارات ونماذج وأنماط اتخاذ القرار وغير ذلك من المشكلات التي سوف نعرضها في الفقرات أدناه.

5.1. مفهوم القرار Decision Concept

القرار في المفاهيم الدارجة في الأوساط العامة لمنظمات الأعمال، بأنه تعبير عن إرادة أو رغبة معينة لدى شخص معين (مادي أو معنوي)، حيث يتم الإعلان عن ذلك بشكل شفهي أو مكتوب من أجل بلوغ هدف معين ويفترض في هذه الحالة توفر البدائل والاختيارات اللازمة لبلوغ ما يصبوا إليه متخذ القرار من أهداف.

إن القرار بشكل عام يتم إتخاذه من قبل الشخص المادي أو المعنوي وفق اتجاهين، وهما:

1. الاتجاه المستند إلى تداخل حالة التمعن والحساب والتفكير والإدراك الواعي.
2. الاتجاه الذي يستند إلى موقف لا شعوري تلقائي وعفوي.

وتبرز هذه الاتجاهات بشكل واضح عندما يكون هنالك مجموعة من البدائل والخيارات مطلوب اعتماد أحدها لاتخاذ القرار المناسب. ومن هذا المنطلق نؤكد على حقيقة مهمة في هكذا اتجاهات، وهي أن القرار الذي يعول عليه في منظمات الأعمال الناجحة، يفترض أن يقع ضمن الاتجاه الأول، وهو يعني أن القرار هو الاختيار المدرك والواعي والقائم على أساس التحقق والحساب في اختيار البديل المناسب من بين البدائل المتاحة في مواجهة موقف معين. بعبارة أخرى أن القرار هو ليس الاستجابة التلقائية ورد الفعل المباشر اللاشعوري وإنما هو اختيار واعٍ قائم على أساس التدبير والحساب والتمعن في تفاصيل الهدف المطلوب تحقيقه والوسيلة التي ينبغي استخدامها، علماً بأن الهدف والوسيلة في هذه الحالة يرتبطان بشكل وثيق بما يسمى بمحل القرار[1] أو الإطار الموضوعي، أي أنه عندما يكون هنالك محل قرار فإنه من الممكن أن يكون هنالك نتيجة أو غرض مطلوب الوصول إليه مع الاعتماد على وسائل ومسارات للوصول إلى ذلك.

6.1. اتخاذ القرارات الإدارية

لأن القرارات بشكل عام تصدر عن الإدارة والمدراء القائمين على رأس الهيكل التنظيمي الإداري، سميت القرارات بالإدارية وينطوي هذا المصطلح في طياته على مضمون العملية الإدارية في منظمة الأعمال الإنتاجية والخدمية، التي

(1) يرد محل القرار في الكثير من أدبيات الإدارة مرادفاً لمفهوم المشكلة المطروحة أو باعتباره تحدي معين ذات طبيعة إنتاجية أو خدمية. لمزيد من التفاصيل. انظر الفضل مؤيد عبد الحسين، نظريات اتخاذ القرار، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان 2004. ص14.

هي في حقيقة الأمر وليدة النشاطات الإدارية المختلفة، وتعتبر عملية اتخاذ القرارات من الوظائف المستمرة والمتغلغلة في النشاط الإداري لأنها لا تقتصر على موظف دون غيره أو مستوى إداري دون سواه. فهي في الواقع تنتشر في كل أرجاء التنظيم وتمارس على جميع مستوياته. كما أن عملية اتخاذ القرارات من حتميات الأمور في الإدارة بشكل عام، أي أنها ضرورية في كل الأوقات والظروف. والإداري يمارسها ما دام على رأس عمله فهو يتخذ العديد من القرارات يومياً لأن المشاكل الإدارية تستدعي التحليل واتخاذ القرارات المناسبة دوما. ويذهب بعض الباحثين إلى تعريف الإدارة بأنها، عملية صنع القرارات، والى وضع علامة المساواة بين الإدارة واتخاذ القرارات وهم يعتبرون التنظيم بناءاً تتكون لبناته من مراكز صنع القرارات المختلفة.

ويرى الكثير من أساتذة الإدارة أن عملية اتخاذ القرارات هي أهم عنصر في عمل وحياة المنظمات، فاتخاذ القرارات هو جوهر عمل القادة وهو نقطة البدء بالنسبة لجميع الإجراءات وأوجه النشاط والتصرفات التي تتم في المنظمة. والعجز عن اتخاذ القرارات اليومية (بسيطها وجسيمها) يؤدي إلى تجمد العمل وشل النشاط واضمحلال المنظمة.

ويرى البعض أن عملية اتخاذ القرارات تمثل اختياراً لبديل معين من بين البدائل المتوفرة بحيث يصل الإداري إلى نتيجة معينة عما يجب أن يؤديه وعما يجب أن لا يؤديه تجاه موقف معين. والقرار يمثل نوعاً من بدائل السلوك والاتجاه الذي يتم اختياره من بين الكثير من البدائل.

كما تعرف عملية اتخاذ القرارات بأنها اختيار بين أفضل البدائل وأفضل السبل لتحقيق الهدف، وهي اختبار لمدى كفاية الرؤساء وقدرتهم على تحمل المسؤولية والبت في الأمور.

7.1. أنواع القرارات:

يمكن تصنيف القرارات بأشكال شتى وفقاً للمعيار الذي يستخدم في عملية التصنيف. وبشكل عام فإنه يمكن التمييز بين القرارات على النحو التالي:

إذا استخدمنا صفة الشخص أو الهيئة التي تقوم باتخاذ القرار كمعيار للتصنيف، فإننا يمكن أن نميز بين القرارات التنظيمية والقرارات الشخصية. فالقرارات التنظيمية هي التي يتخذها الإداري بصفته الرسمية، أي بصفته عضوا في التنظيم أو موظفاً يشغل منصباً رسمياً. أما القرارات الشخصية فهي التي يتخذها الإداري بصفته الشخصية وبناء على معتقداته وميوله. وفي الواقع فإن الفرق بين القرارات التنظيمية والقرارات الشخصية هو فرق في الدرجة وليس في النوع، لأن شخصية الإداري تظهر في معظم القرارات التي يتخذها حتى ولو كانت قرارات تنظيمية. فالإداري إنسان ولا يستطيع أن يتخلى عن قيمته وآرائه الشخصية أو يتجرد من إنسانيته ويصبح آلة صماء.

إذا استخدمنا أهمية القرار أو الآثار التي تترتب عليه كمعيار للتصنيف، فإننا نستطيع التمييز بين القرارات الاستراتيجية والقرارات الروتينية التشغيلية. فالقرارات الاستراتيجية قرارات هامة تتعلق بوضع السياسة العامة للتنظيم وتتطلب موارد كبيرة واستثمارات ضخمة وتكون النتائج المترتبة عليها خطيرة بالنسبة لمستقبل التنظيم وحيويته.

إذا استخدمنا طبيعة القرار ودرجة تكراره معياراً للتقسيم. فإننا يمكن أن نصنف القرارات إلى قرارات متكررة وقرارات استثنائية. والقرارات المتكررة هي التي يمكن جدولتها أو برمجتها ووضعها في كتيبات التعليمات.

ومن الملاحظ أن معظم القرارات الاستراتيجية هي أيضاً قرارات استثنائية غير قابلة للبرمجة، بعكس القرارات الروتينية التشغيلية التي هي في الغالب قرارات تتكرر بشكل دوري ويمكن برمجتها إلى حد كبير.

إذا استخدمنا درجة شمول القرار أو حجم المنظمة التي يتأثر به أساساً للتصنيف فإننا نستطيع التمييز بين القرارات الشاملة والقرارات الجزئية. فالقرارات الشاملة هي التي يمتد أثرها إلى معظم وحدات التنظيم ويغطي العديد من نشاطاته كالقرارات التي تتعلق بتحديد ساعات الدوام والإجازات وغيرها. فهذه قرارات واسعة الأثر وتشمل جميع الموظفين على كافة المستويات، أما القرارات الجزئية فتشمل وحدة معينة أو مستوى واحداً من التنظيم دون سواه.

وفي العادة فإن التنظيمات الإدارية تستخدم عدداً من الوسائل للتأثير في الطريقة التي يتبعها أعضاء التنظيم في اتخاذ القرار. ومن هذه الوسائل: تقسيم العمل إلى وظائف متخصصة وتحديد صلاحيات كل وظيفة في عملية اتخاذ القرارات. وكذلك السيطرة على خطوط الاتصال التي تربط بين وحدات التنظيم والتي تتدفق خلالها المعلومات اللازمة لاتخاذ القرارات. وهناك أيضاً عملية تدريب الموظفين وغرس روح الولاء فيهم والتأثير على طريقتهم في التفكير وتحليل المشاكل والنظر إلى الأمور بشكل عام.

8.1. نماذج اتخاذ القرارات

يرد ضمن الفكر الإداري أنواع مختلفة من نماذج عملية اتخاذ القرارات، وفيما يلي عرض لأهمها[1]:

أولاً: نموذج سايمون SIMON:

وفي هذا الصدد يميز سايمون بين طريقتين لاتخاذ القرارات وهي كما يلي:

(1) الطريقة الرشيدة Rational: وهي التي تقتضي دراسة كافة البدائل بشكل علمي دقيق وتقييم كل منها بشكل موضوعي من ثم اختيار أفضل هذه البدائل وهو الذي يحقق أقصى منفعة بأقل التكاليف.

(2) الطريقة المعقولة أو المرضية Satisfieng: وهي التي يتوخى فيها الإداري الوصول إلى قرار مقبول (مرضي وليس مثالي) ويتوقف بحثه عن البدائل عند وصوله إلى قرار معقول ولا بأس به على الرغم من احتمال وجود بدائل أفضل. ومن الجدير بالذكر هنا، هو أن هذه الطريقة هي السائدة في اتخاذ القرارات الإدارية بسبب صعوبة حصر جميع البدائل الممكنة، وبسبب الوقت والجهد والذكاء الذي تتطلبه عملية اتخاذ قرارات مثلى بشكل رشيد.

---

(1) لمزيد من التفاصيل انظر:

د. عقيل حاسم، د. موسى المدهون، قضايا إدارية معاصرة، منشورات جامعة الإسراء، 2004، ص24.

ثانياً: نموذج لندبلوم LINDIBLOM

يقول لندبلوم أن هناك طريقتين رئيسيتين لاتخـاذ القـرارات في الإدارة وهـي كما يلي:

(1) الطريقة الرشيدة الشاملة أو الجذرية: هي التي ينظر فيها إلى المشكلة بشكل عقلاني رشيد وتدرس فيها كافة البدائل الممكنة دراسة جذرية شاملة تشـمل جميع جوانبها وكافة أبعادها ثم يختار البديل الأمثل.

(2) الطريقة الجزئية المتزايدة أو الفرعية: وهي الطريقة التي ينظر فيهـا الإداري إلى المشكلة نظرة جزئية، حيـث يركـز دراسـته عـلى الجوانـب الهامـة فقـط، وعندما يتخذ قرار فإنه لا يدرسه من أساسه وإنما يولي عنايته للتغييرات التـي تحصل عليه. وهي الطريقة الأكثر شيوعاً. ومن الأمثلة المناسبة على ذلك، هو رصد المخصصات المالية في موازنة المنظمة، حيث تتركز الدراسة على الزيـادة أو النقص في مخصصات كـل وظيفـة فرعيـة (الإنتـاج، التسـويق، ... الـخ) وليس على دراسة هذه المخصصات دراسة جذرية شاملة.

ثالثاً: نموذج اتزيوني ETZIONI :

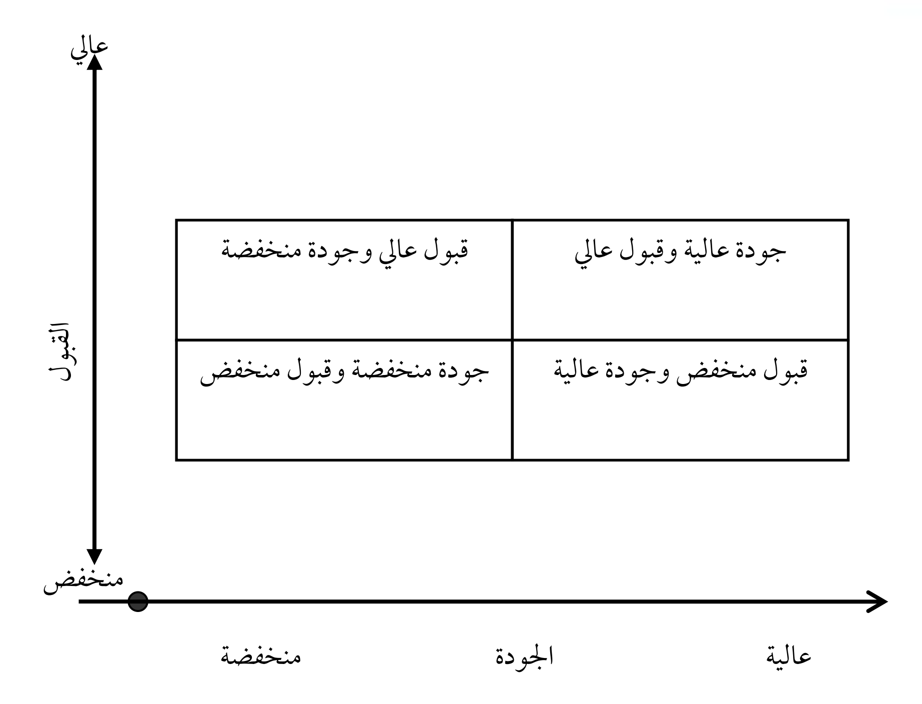
تعقيباً على نموذج لندبلوم وما تعرض له من نقد من قبل عدد من المفكـرين، فإن اتزيوني يؤكد أن عملية اتخاذ القرارات الإداريـة في الواقـع هـي مـزيج مـن الطريقتين الجذرية والجزئية التزايدية، وقد اقترح استخدام مصطلح " الفحـص المختلط Mixed scanning " لوصف هذه الطريقة المركبة. فهو يقـول أن عمليـة

اتخاذ القرارات يتم فيها أولاً فحص عام وجـذري للمشـكلة ثـم ينتقـل بعـدها الاهتمام إلى النواحي البارزة التي تلفت الانتباه.

ومن الأمثلة على ذلك. طريقة اتخاذ القـرارات الماليـة من قبل إدارة التمويـل حيث أن القائميـن يقومــون عـادة باستعـراض مـوازنة المنظمـة بشـكل عـام، ومن ثم يتم تجزئتها إلى فصول ويتم فحص مخصصـات كــل دائــرة عـلى حـدة مولياً اهتمامه بالمشروعات الجديدة والمخصصات المطلوبة لأشياء هامة.

9.1. فاعلية القرار (القبول والجودة)

يتسم القرار الفعال بالجودة أو النوعية الجيـدة (Quality) وفي نفـس الوقـت بالقبول من جانب العاملين الذين سـيقومون بتنفيـذه (Acceptance). ويقصـد بالنوعية هنا هو جودة القرار، وكفاءته وانسجامه مع المعـايير الفنيـة والإجرائيـة والاقتصادية (نسبة المنفعة إلى التكلفة). وربـما تتطلـب عمليـة تصـميم الجـودة الاستعانة بالخبراء، أما القبول للقرار، فيعني اقتناع العاملين المهنيين به ورضاهم عنه واستعدادهم لتنفيذه وتحقيق الأهداف المطلوبة، والذي ينجم ذلك عادة عن مشاركتهم في صنع القرار، والمشكلة الأساسية التي يواجهها متخذ القـرار هـي تحديد الأهمية النسبية لكل من عنصري الجودة والقبـول، وبخاصـة في الحـالات التي يمكن أن يتعارض فيها هذان العنصران. ويوضح الشكل التالي أهمية هذين العنصرين في تصنيف المشكلات، وأساليب اتخاذ القرارات المناسبة في كل حالة:



إن ما يقلل من جودة القرار وقبوله، هو كثرة الأخطاء المرافقة لعملية اتخاذ القرارات، وفي هذا الصدد يمكن أن نشخص العديد من الأخطاء الشائعة والمعوقات في منظمات الأعمال وتمثل الأخطاء المدرجة في أدناه أخطاء شائعة يقع فيها العديد من المديرين والمشرفين عند معالجة مشكلات العمل واتخاذ قرارات بشأنها وأهمها ما يلي:

1. عدم الاعتراف بأن القرار كان سيئاً

يقال بأن أسوأ من القرار السيئ هو عدم الاعتراف بأنه كان سيئاً، وهذا يحدث غالباً بسبب تدخل الذات في عملية اتخاذ القرارات، ولكن المدير القوي والواثق بقدراته هو من يعترف بخطئه بدلاً من أن يستمر في محاولة الإثبات بأن قراره كان سليماً.

2. التردد:

وهذا يحدث غالباً عندما يكون صانع القـرار غـير آمـن أو غـير مطمـئن، أو لخوفه من الخطأ ومن عواقبه، أو أن التردد يحصـل نتيجـة للبحـث المسـتمر عـن معلومات إضافية لجعل عملية صنع القرار سهلة، وبينما لا ينصح أحد أن يتخـذ قرارات سريعة، إلا أن صانعي القرار يعرفون متـى يتوقفـون عـن البحـث عـن حقائق إضافية والقيام بإصدار قرار، ولهذا فإن العمل تحـت قيـادة مـدير مـتردد وغير حاسم يمكن أن يكون محبطاً للمرؤوسين.

3. التسرع (اتخاذ أي قرار أفضل من لا شيء):

وهذا عكس الخطأ الثاني المذكور أعلاه، فبعض المدراء الذين يخـافون مـن أن يقال عنهم بأنهم غير حاسمين أو مترددين يلجئون إلى اتخاذ قرارات بسرعة عـلى أساس أنه " ينبغي عليهم أن يفعلوا شيئاً"، من الواضح أن هذا المـدخل عمومـاً يعني تجاوز الخطوات الأساسية في عملية تحليل المشكلات وصنع القرارات.

4. الافتراض بأن الناس منطقيون:

كثير من المدراء ينخدعون بهذا المفهـوم الخـاطئ. إذ ربـما يبـدو أن كـل شيء منطقي وعقلاني بالنسبة للمدير ولكن النـاس الـذي يتـأثرون بـالقرار سـيرون الأمور بشكل مختلف، وهذا يمكن أن يكون محبطاً للمدير مما سيزيد مـن مقـدار المستوى الانفعالي للموقف، من المستحسن دوماً أن يضـع متخـذ القـرار نفسـه مكان الآخرين (وهذا صعب أحياناً) ويحاول أن يرى القرار من وجهة نظـرهم.

فإذا وجد صعوبة في القيام بذلك، فإن عليه أن يسألهم كيف يرون القرار ويصفونه له كما يجب أن يكون.

5. عدم الحصول على موافقة الإدارة العليا:

خلال عملية اتخاذ القرار ينبغي أن يتذكر المدراء دائماً بأن لهم رئيساً أعلى وهم مسئولون أمامه، وأنه يتأثر بالقرارات التي يتخذها الرئيس في الإدارة العليا، فإذا اتخذ المدير قراراً وتم نقضه من قبل الإدارة العليا، فإن مركزه يضعف في نظر المرؤوسين أو العاملين.

بالإضافة إلى ما تقدم من أخطاء شائعة، فإن الفكر الإداري يكشف عن معوقات يمكن أن تعرقل عملية اتخاذ القرار ومن شأنها أن تقلل من فاعلية القرار المتخذ وهذه المعوقات هي:

1. التجنب المريح Relaxed Avoidance

بموجب هذه الحالة فإن المدير يمتنع عن اتخاذ القرار وذلك بعد أن يدرك بأن النتائج سوف لن تكون ذات فائدة، وأن تجنب عملية اتخاذ القرار هو الخيار المريح له.

2. التغير المريح Relaxed Change:

بموجب هذه الحالة فإن المدير يعمد إلى عمل فعل ما بعد إدراكه بأن عدم القيام بأي فعل سوف ينطوي على نتائج سلبيه.

3. التجنب الدفاعي Defensive avoidance:

بموجب هذه الحالة، يجد المدير نفسه في مواجهة المشكلة لكن غير قادر على إيجاد الحل بناءاً على خبرته أو تجربته في الماضي، حيث يفكر في الهروب وقد يجعل غيره من يتخذ القرار ويتحمل نتائجه، أو أنه يفكر بالحل الواضح البسيط ويهمل مخاطرة ذلك.

4. الذعر والارتباك Paine:

بموجب هذه الحالة يشعر المدير بالذعر ليس بضغط المشكلة ذاتها وإنما أيضاً بضغط عامل الوقت عليه، وهنا يشعر المدير بعدم قدرته على فهم وتقييم المشكلة وعدم قبوله بمساعدة العاملين له وبالتالي ينتابه الشعور بالذعر والارتباك وعدم الارتياح.

ومقابل هذه الأخطاء الشائعة والمعوقات في عملية اتخاذ القرار، يمكن أن يتم تشخيص ماهية ومواصفات القرار السليم، حيث أن هكذا قرار يتصف بعدد من المواصفات ندرجها على النحو التالي:

1. **الشرعية:** ويعني ذلك الانسجام مع القوانين والأنظمة واللوائح المقبولة بشكل عام.
2. **الدقة:** ويقصد بذلك الاستناد إلى معلومات دقيقة، ودراسة وافية للمشكلة بكافة أبعادها، والابتعاد وعن التخمين والحدس.
3. **المشاركة:** ويتم ذلك من خلال أخذ آراء الأشخاص المهنيين والمختصين، بالشكل الذي يسهل قبول القرار.

4. **الصياغة الواضحة للقرار:** بحيث لا ينجم عنه لبس أو غموض أو احتمال سوء التفسير.

5. **الاتصال:** وهو يعني اختيار وسيلة الاتصال المناسبة لإبلاغ القرار للأشخاص المعنيين.

6. **التوقيت:** ويقصد بذلك اختيار الوقت المناسب للقرار دون تسرع (قبل الأوان) ودون تسويف (بعد الأوان).

7. **الكفاية:** وذلك لتحقيق أفضل النتائج بأقل التكاليف.

8. **الفاعلية:** ويعني ذلك تحقيق الهدف ومعالجة المشكلة.

9. **الواقعية:** ويعني ذلك إمكانية التنفيذ على الصعيد العملي، والانسجام مع قدرات العاملين والإمكانات المتاحة.

10. **الموضوعية :** ويقصد بذلك الابتعاد عن الأهواء والتحيزات، وعدم التأثر بالضغوط الشخصية أو المصالح الخاصة.

إن اختزال عدد الأخطاء الشائعة في القرارات المتخذة وزيادة عدد المواصفات والقواعد الواردة ذكرها أعلاه يرفع من فاعليه القرار ويضفي عليه صفة الرشد. حيث أن هذه الصفة هي أعلى ما يهدف إليه متخذ القرار، ألا وهو اتخاذ القرارات الرشيدة التي يمكن أن تؤدي إلى نتائج مثلى.

والتساؤل الذي يمكن أن يرد من هذا الصدد هو ما المقصود بالقرار الرشيد في المفهوم الإداري وفي الطروحات الفكرية الإدارية؟ وهذا التساؤل نجد الإجابة عليه في الفقرة أدناه.

10.1. مفهوم القرار الرشيد ومعوقات الوصول إليه:

يقصد بالقرار الرشيد، بأنه ذلك القرار الذي تتوفر فيه متطلبات العقلانيـة أو المعقوليـة في المضـمون والمحتـوى، إضـافة إلى أنـه قـائم عـلى أسـاس علمـي ومدروس، ويذهب البعض من المتخصصين في العلوم الإداريـة إلى القـول بـأن القرار الرشيد، هو ذلك القرار الذي يقوم على أساس مبدأ الرشـد في التصرـف، وهذا المبدأ يتم استنباطه من مفهوم المصطلح Rational ويعني الرشيد[1]. ومـن أجل تحليل ودراسة عملية اتخاذ القرار الرشيد لا بد من الدخول في مضمون هذا المصطلح، حيث أن له دلالات فكرية واسعة ترتبط بشكل وثيق بالفكر الإنساني والتنظيمي لمنظمة الأعمال. ومن أجل الوقوف على الأبعاد اللغوية لهذا المصطلح العلمي، تم الاستعانة بقاموس المنجد اللغوي في بيان الخلفية اللغوية والفكريـة له، حيث وردت تفسيرات متعددة لهذه الكلمة مضمونها العام هو إضفاء صـفة العقلانية في السلوك والتصرف، ومنه يفهم أن ترشيد القرار يعني إضـفاء صـفة الحكمة والعقلانية عليه حيث أن كلمة (رشيد) تأتي صفة للإنسان للدلالة عـلى الحكمة والعقل وحسن التصرف كـما جـاء في قولـه تعـالى: ﴿فَٱتَّقُواْ ٱللَّهَ وَلَا تُخۡزُونِ فِي ضَيۡفِيٓۖ أَلَيۡسَ مِنكُمۡ رَجُلٞ رَّشِيدٞ ٧٨﴾ [هود:78].

وتتمثل فكرة الرشد في القرار الإداري في العهد الإسلامي بجـلاء في الفـترة التي تلت حياة الرسول ﷺ التي سميت بفـترة الخلفـاء الراشـدين للإشـارة إلى

---

(1) لمزيد من التفاصيل راجع مؤلفنا الموسوم:

نظريات اتخاذ القرار، إصدار دار المناهج، عمان، 2004، ص30.

(الرشد) في إدارة أمور الرعية، والعقلانية في التصرف، ومن هذه الفترة نستشهد برسالة الإمام علي بن أبي طالب عليه السلام الموجهة إلى عاملة مالك الأشتر النخعي عندما ولاه مصر التي جاء مضمونها ما يدعو إلى التصرف الرشيد واتخاذ القرارات الإدارية الرشيدة وعلى وجه التحديد في اختيار الموظفين وتحفيزهم وتحديد القادة الإداريين وحثهم على الرشد في التصرف بأموال المسلمين، ونقتبس منها ما يلي[1]:

(انظر في أمور عمالك فاستعملهم اختباراً ولا تولهم محاباة وأثراً، وتوخ منهم أهل التجربة والحياء فإنهم أكرم أخلاقاً وأبلغ في عواقب الأمور نظراً... الخ).

وعند البحث في الفكر الإداري المعاصر عن مفهوم الرشد والأمثلية في السلوك والتصرف نلاحظ، إن كل من:

1. ماكس وبيبر Max Webor.

2. هربرت سايمون H. Simon.

هم من الرواد الأساسيين الذين اختصوا في البحث في موضوع الرشد وتحديد دلالات عملية ترشيد القرار للوصول إلى حالة الأمثلية وذلك في

---

(1) إن تفسير مضمون الرسالة يشير إلى الوظائف الإدارية الخمسة للمدير وفق المفاهيم المعاصرة، وهي: التخطيط، التنظيم، الرقابة، التحفيز وتنمية المدراء، لمزيد من التفاصيل، راجع بحث الأستاذ الدكتور خضير كاظم الإدارة الإسلامية في فكر الإمام علي (ع)- الأصالة والمعاصرة مجلة حضارة الكوفة، مركز دراسات الكوفة التابع لجامعة الكوفة في العراق- العدد 2، 1992 ص12.

تصنيف الأفعال البشرية. وقد صنف ماكس ويبر بشكل عام هـذه الأفعـال مـن حيث درجة رشدها إلى ثلاثة أنواع وكما يلي:

أولاً: أفعال عاطفية، والتي تكون فيها العاطفة والمشاعر هي التي توجـه سـلوك الفرد واعتبرها ويبر مناقضة لأحكام العقل.

ثانياً: أفعال تقليدية، وهي الأفعال التي تحكمها العـادات والأفكـار السـائدة في المجتمع ولا يحكمها العقل.

ثالثاً: أفعال رشيدة، وهي الأفعال التي تخضع للتحليل العلمي والمنطقـي، وقـد ميز ماكس ويبر بين نوعين أساسين لتحديد الرشد في هذه الأفعال ، وهي:

1. أفعال رشيدة قيمية Value Rational، وبموجبها يكون الهدف من الفعل هو الفعل نفسه، أي في هكذا حالة يؤخذ بنظر الاعتبار تـوافر قـيم معينـة تعبر عن درجة الرشد في التصرف.

2. أفعال رشيدة وسيلية Instrumental، حيث تكون هذه الأفعال رشـيدة في ضوء الخطوات المتبعة في التنفيذ، أي أنها أفعال رشيدة لكونها استخدمت وسائل عقلانية متتابعة في سبيل الوصول إلى الهدف.

أما بخصوص العالم الآخر (هربرت سايمون)، فقد اعتـبر وسـائل الوصـول إلى القرار الرشيد أو الأمثل هي بمثابة عوامل مسـاعدة. وقـد أثـارت سـايمون الأفكار التي وردت في النظرية التي جاء بها مـاكس ويـبر بخصـوص (الرشـد القيمي) حيث أضاف مفاهيم جديدة للرشد وهي كما يلي:

1. الرشد الموضوعي Objective Rationality.

2. الرشد الذاتي Subjectivity Rationality.

في حين قدم الأستاذ (Paul Daising) دراسة جاء بتقسيمات أخرى ومفصلة غير ما ورد أعلاه، وهي:

1. الرشد الفني Technical Rationality.

2. الرشد الاقتصادي Economic Rationality.

3. الرشد الاجتماعي Social Rationality.

4. الرشد القانوني Legal Rationality.

5. الرشد السياسي Political Rationality.

إن الرشد في ظل ما طرحه كل من ماكس ويبر وسايمون ليس مطلقاً، بل هنالك مجموعة من المعوقات التي تواجه عملية اتخاذ قرار رشيد بشكل متكامل، حيث أن افتراض الرشد الكامل في تصرفات الفرد في الواقع العملي يرد من باب المثاليات البعيدة عن عالم الواقع، فالإنسان عادة يتأثر بالقيم والاعتبارات المختلفة المتصلة بالقرارات التي يتخذها، ويرى البعض من المفكرين وعلى رأسهم هربرت سايمون، إن ما يتطلع اليه الفرد في الواقع العملي هو الوصول إلى قرارات معقولة وليست قرارات مثلى (Optimal Decision) ومن هذا المنطلق قدم (H. Simon) مقولته الشهيرة بأنه ليس هنالك رشد مطلق أو أمثلية مطلقة، وإنما ينبغي الإقرار بوجود رشد أو أمثلية مقيدة. وبشكل عام يمكن تلخيص أهم الأسباب التي دعته إلى إطلاق هذه المقولة بما يلي:

1. صعوبة تحديد المشاكل الإدارية ودراستها وجمع البيانات المتعلقة بها بشكل موضوعي وذلك بسبب وجود العنصر الإنساني في الإدارة.

2. عدم مقدرة الفرد على تحديد كافة البدائل الممكنة لحل المشكلة.

3. صعوبة تقييم البدائل بشكل علمي دقيق لأن مزاياها وعيوبها والآثار المترتبة عليها تقع ضمن المستقبل الذي لا يمكن التنبؤ به بشكل دقيق.

4. وجود العديد من العوامل الاجتماعية والعناصر الشخصية والقيم والمعتقدات التي تؤثر على المدير عندما يتخذ قرارات معينة.

5. عدم توفر الوقت الكافي والكفاءات الضرورية لإجراء دراسات شاملة للمشاكل والبدائل.

6. ارتباط الإدارة بالقوانين يحد من عدد البدائل الممكنة لمواجهة المشاكل في الواقع العملي.

7. ارتباط الإدارة بالسياسات العامة في البلد يقلل من موضوعية القرارات ويدخل في الحسبان اعتبارات غير رشيدة عند تقييم البدائل.

8. التزام متخذ القرار وارتباطه بظروف سابقة – وهو ما يطلق عليه أحياناً اسم التكاليف الغارقة Sunk Costs. حيث يصعب معها التراجع عن القرار رغم اكتشاف متخذ القرار لبدائل أفضل في المستقبل.

11.1. أنماط اتخاذ القرار Decision Making Styles

يطرح المتخصصين في العلوم الإدارية مداخل عدة لدراسة أنماط اتخاذ القرار إلا أن أهمها ما يلي:

1. من حيث تعامل المديرين مع حل المشكلات.
2. من حيث الأبعاد الفكرية التي تقسم من خلال المحاور الأفقية والعمودية.
3. من حيث الوقت الذي تستغرقه عملية اتخاذ القرار.
4. من حيث مدى استخدام المدير لسلطته الرسمية.

وفيما يلي توضيح لأهم هذه المداخل وهو الأول [1]:

أولاً: أنماط اتخاذ القرار من حيث تعامل المديرين مع حل المشكلات:

حيث يتم تقسيم المدراء أو متخذي القرار إلى ثلاثة أنواع وكما يلي[2]:

---

(1) يطرح بعض المتخصصين بالعلوم الإدراية هذه الأنماط على أساس وجهات نظر مختلفة، لمزيد من التفاصيل أنظر:

David Targett " Analytical Decision Making" Prentice Hall, Great Britain, 1996, p.12.

(2) يذهب البعض إلى إطلاق تسميات مشابهة لما هو وارد أعلاه حول سلوكيات المدير أو متخذ القرار، حيث يقسم إلى من هو يبتعد عن المشكلة، وآخر يقف على الحياد وآخر يبحث عن المشكلة لكي يقف على متطلبات معالجتها، حيث قد تكون المشكلة في هذه الحالة فرصة استثمارية أو دخول سوق جديدة أو طرح منتج جديد وما شابه ذلك. لمزيد من التفاصيل راجع: الحديثي، علي حسن وآخرون- نمذجة للقرارات الإدارية – اليازوي، عمان، 1999، ص78.

1. المتجنب للمشكلة Problem Avoider.

2. يواجه المشكلة ويحلها Problem Solver.

3. يبحث عن المشكلة Problem Seeker.

بالنسبة للنوع الأول، فهو يتجنب مواجهة الاحتكاك مع عوامل المشكلة، بعبارة أخرى يهمل كل ما من شأنه إثارة المتاعب في عملية اتخاذ القرار إلى درجة أنه قد يهمل المعلومات والبيانات التي من شأنها أن تثير المشاكل أمامه.

في حين أن النوع الثاني يتصف في كونه حيادي بحيث أنه ينتظر المشكلة لكي تقع، وحالة وقوعها فإنه يتعامل معها بشكل اعتيادي. أما بالنسبة للنوع الأخير من متخذي القرار فهو ذلك الذي يبحث عن أية مشكلة لغرض حلها ومعالجتها وهو على استعداد لما هو غير متوقع من إفرازات تنجم عن هذه المشكلة.

ويذهب بعض المتخصصين في العلوم الإدارية والمالية إلى إعطاء مسميات مرادفة لما هو وارد أعلاه، وذلك عندما يتعلق الأمر بالمقارنة بين سلوكيات متخذ القرار وقيم التدفق النقدي من جهة ومستويات المنفعة المتوقعة من جهة أخرى، حيث يقسم أنماط المدراء متخذي القرار إلى ثلاثة أنواع كما يلي:

1. مجازف في قراراته.

2. عادي أو طبيعي في اتخاذ القرارات.

3. غير مجازف في اتخاذ القرارات.

ويترتب على تصرف وسلوكيات كل نوع من هذه الأنواع مردود وتدفق نقدي متباين كما هو واضح في الشكل رقم (1-4).

شكل رقم (1-4) أنواع متخذي القرارات في منظمة الأعمال

مستويات المنفعة المتوقعة
متخذ القرار مجازف
متخذ القرار عادي أو طبيعي
متخذ القرار غير مجازف
3000
2000
1000
قيم الدفق النقدي
0
2500
5000
7500
10000

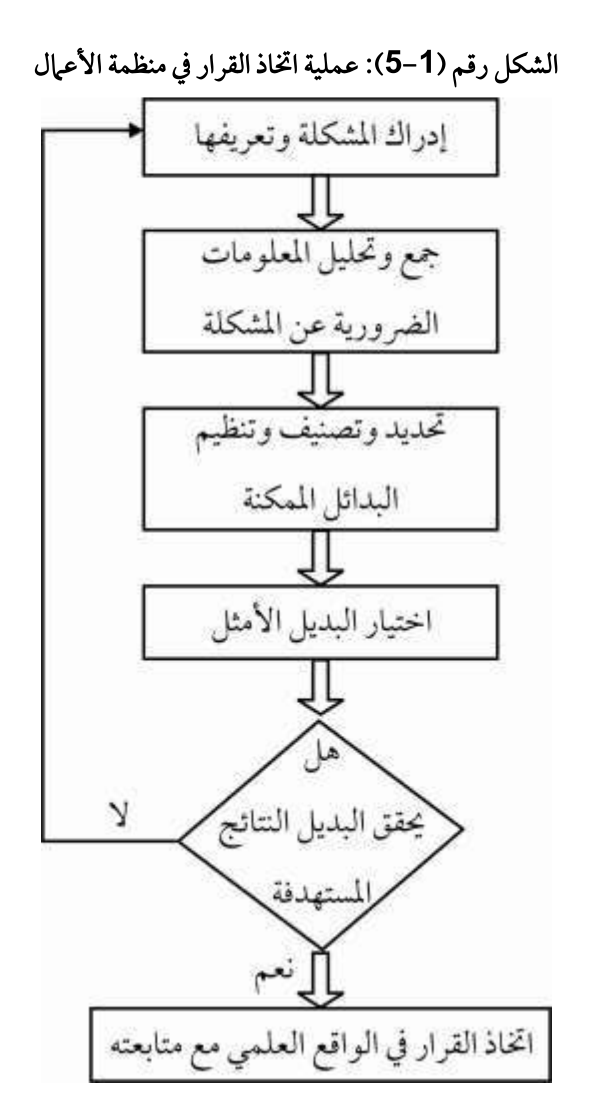
1. 12. عملية اتخاذ القرار في منظمة الأعمال

يذهب البعض من المهتمين بالفكر الإداري إلى التمييز بين عملية صنع القرار Decision Making وعملية اتخاذ القرار Decision Taking، حيث أن صياغة القرار تتضمن كافة المراحل التي من شأنها أن تقود إلى عملية اتخاذ القرار في حين أن المصطلح الأخير يعني مرحلة الاختيار للبديل والتنفيذ في صياغة القرار. ورغم هذا التفسير المنطقي والعلمي لهذه المسميات إلا أن الطروحات الإدارية بشكل عام (والكمية منها بشكل خاص) تعتمد مصطلح Decision Making ليدل على مفهوم واحد وهو اتخاذ القرار في منظمة

الأعمال. وتشير هذه الطروحات إلى تعريفات مختلفة لعملية اتخاذ القرار أهمها بأنها مجموعة خطوات Process شاملة ومتسلسلة تهدف في النهاية إلى إيجاد حل لمشكلة معينة أو لمواجهة حالات طارئة أو مواقف معينة محتملة الوقوع أو لتحقيق أهداف مرسومة.

ويمكن توضيح عملية اتخاذ القرار في منظمة الأعمال من خلال الشكل رقم (1-5).

الشكل رقم (1-5): عملية اتخاذ القرار في منظمة الأعمال



من الشكل السابق يتضح أن بداية عملية اتخاذ القرار هي مرحلة إدراك المشكلة وتعريفها، وبقدر تعلق الأمر بمنظمات الأعمال الإنتاجية والخدمية فإن الواقع العملي يكشف عن أنواع مختلفة من المشاكل التي يتطلب الأمر اتخاذ القرار بصددها ومن هذه المشاكل ما يلي:

أولاً: في منظمات الأعمال الإنتاجية

1. مشكلة تخطيط الإنتاج وتحديد المنتوج الأمثل الذي يحقق أعلى عائد ربح بأقل تكاليف ويحقق الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج.
2. تخصيص الموارد النادرة بين الاستخدامات البديلة بأقل كلفة كلية ممكنة.
3. تحديد حجم الدفعة الاقتصادية المثلى من الخزين.
4. تحديد مسارات النقل واختيار خطة النقل المثلى التي بموجبها يتم تسويق وشحن أكبر كمية من البضائع والمنتجات بأقل كلفة كلية ممكنة.
5. تخطيط وتنفيذ المشاريع المختلفة بما يحقق الاستغلال الأمثل للوقت وتدنية التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن.
6. تحديد ستراتيجيات التسويق المثلى التي تحقق الميزة التنافسية للمنظمات المتنافسة في السوق المفتوحة من أجل الهيمنة عن أكبر حصة سوقية ممكنة.

ثانياً: في منظمات الأعمال الخدمية

1. مشكلة تتابع القادمين من المستهلكين للحصول على الخدمة بالشكل الذي يمنع حصول أزمة في مواقع تقديم الخدمة.

2. مشكلة توزيع الوقت المتاح بين العاملين في منظمات الأعمال الخدمية.

3. توزيع الجهد الخدمي للعاملين بين الاستخدامات البديلة.

4. اختيار الفرص الاستثمارية المثلى في البنوك وشركات التأمين التي تحقق أعلى العوائد.

5. تحديد أقصر المسافات وأقل الكلفة لشركات النقل السياحية (الطيران، خطوط النقل البحري... الخ).

إن هذه المشكلات الموجودة في منظمات الأعمال الإنتاجية والخدمية تستوجب جمع المعلومات واختبارها وذلك في إطار عملية نمذجة لمراحل عملية اتخاذ القرار، بحيث يتمكن متخذ القرار من بلوغ الأهداف المطلوب من وراء حل المشكلة، وقد يكون معرضاً للفشل (Failure) أو النجاح (success) كما هو واضح من الشكل رقم (1-6) حيث يتضح من الشكل المذكور أن نمذجة عملية اتخاذ القرار تمر بثلاث مراحل أساسية وهي:

1. مرحلة الذكاء Inteligence phase.

2. مرحلة التصميم Design Phase.

3. مرحلة الاختيار choice phase.

إن نهاية هذه المراحل الثلاث يؤدي إلى اتخاذ القرار المطلوب بخصوص معالجة مشكلة معينة في واقع الحال.

13.1. الأمثلية والقرار الأمثل

تعتبر الأمثلية Optimization (سواء كانت مقيدة أو مطلقة) حالة مستهدفة من قبل الكثير من المنظمات وترتبط هذه الحالة بالقرار الأمثل الذي يتم التوصل إليه بعد أن تتم إنجاز مراحل النمذجة في عملية صنع القرار المشار إليها أعلاه والمفاضلة بين البدائل المتوفرة لاختيار البديل الأمثل الذي يحقق أفضل النتائج للمنظمة. وتعرف الأمثلية بشكل عام بأنها الحالة القصوى في تحقيق النتائج النهائية (تعظيم الأرباح وتقليل التكاليف) بخصوص أمراً معيناً. ومن الناحية الإدارية وبالذات عندما يتعلق الأمر بمعالجة مشكلة معينة تعرف الأمثلية بأنها الحالة التي تكون عندها النتائج بأحسن ما يمكن وتحقق للجهة المعنية بمعالجة المشكلة القناعة التامة وتوفر لها ما يطمح إليه من متطلبات ورغبات من كافة الجوانب والعوامل المكونة للمشكلة.

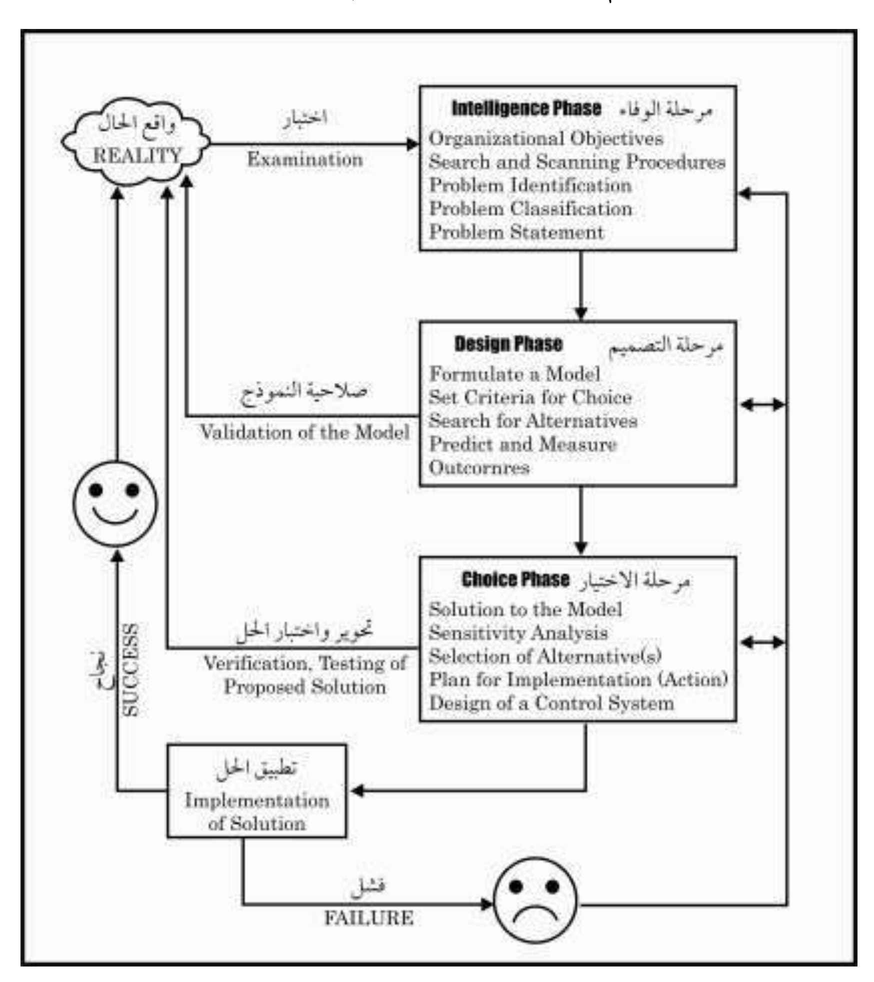
ضمن حالة الأمثلية يستخدم مؤشر مهم يعرف بمؤشر الأمثلية الذي على أساسه يتم تحديد الموقف بخصوص اختيار حل معين أو نتيجة معينة من بين مجموعة الحلول والنتائج المتوفرة التي يتم التوصل إليها بخصوص المشكلة المدروسة[1].

---

(1) في إطار المنظمة الإنتاجية إن مؤشر الأمثلية قد يكون بلوغ أقل مستوى ممكن من التكاليف أو أعلى مستوى ممكن من الأرباح وتحقق أفضل الصيغ لاستغلال مستلزمات الإنتاج الأساسية لمزيد من التفاصيل، انظر:

W.radzkowski: Matematyczne Techniki Zarzadzania. Pwe, Warszawa, 1980. S. 49.

شكل رقم (1-6) مراحل النمذجة في عملية اتخاذ القرار

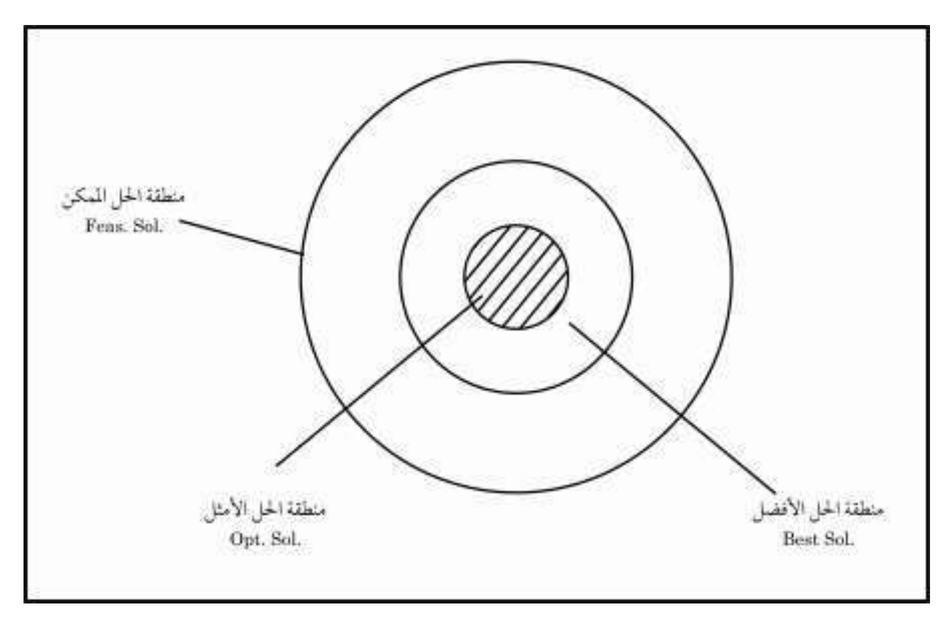


بهدف التعرف بشكل دقيق على حالة الأمثلية المستهدفة، نعود مرة أخرى إلى الحلول الثلاث الأساسية التي يتم الحصول عليها عند حل المشكلة، وهذه الحلول هي:

1. الحل الممكن Feasible Solution.
2. الحل الأفضل Best Solution.
3. الحل الأمثل Optimal Solution.

إن العلاقة بين هذه الحلول موضحة بالشكل رقم (1-7) في إطار التداخل والاحتواء لأحدهما للآخر.

شكل رقم (1-7): العلاقة بين الحلول الثلاث

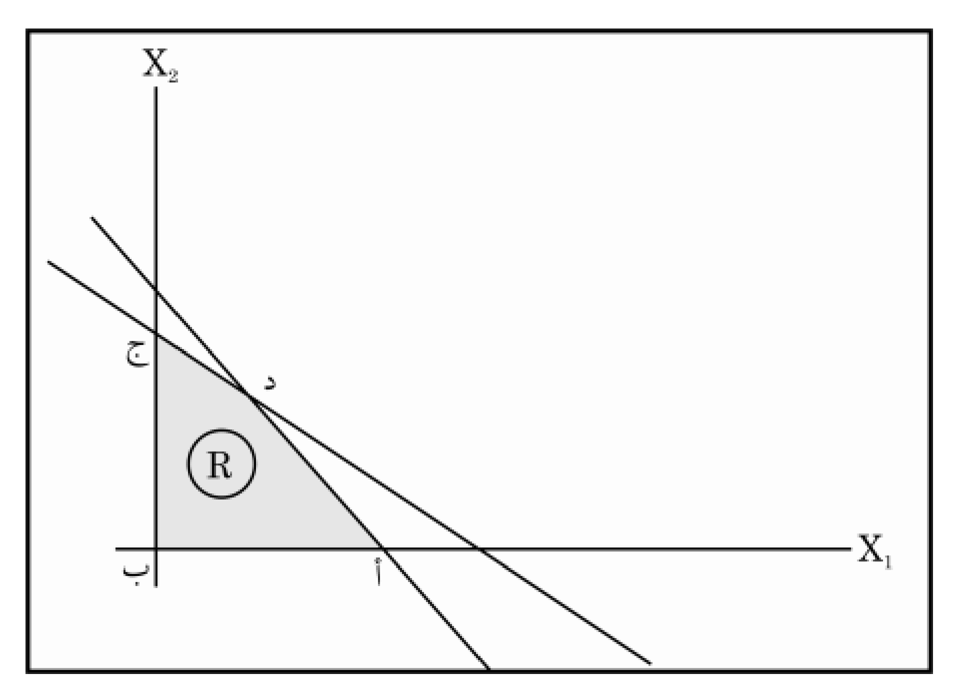


حيث من الشكل (1-7) يتضح أن الحل الأمثل هو جزء من الحل الأفضل وكلا الاثنين هما جزء من الحل الممكن، وعلى أساس هذه الحلول يتم بناء نظريات ومتطلبات بلوغ حالة الأمثلية، وهذه النظريات هي:

نظرية رقم (1) **Theory No. (1)**

وتعرف باسم نظرية التداخل الضمني للحلول ومفادها أن كل من الحل الأمثل والحل الأفضل هما جزء من الحل الممكن، وإن الحل الأمثل هو جزء من الحل الأفضل، وعلى الأغلب يكون الحل الوحيد.

فإذا ما علمنا أن منطقة الحلول الممكنة لمشكلة معينـة تتكـون مـن اثنـين مـن المتغيرات واثنين من القيود والمطلوب تعظيم دالـة الهـدف، وإن الشـكل البيـاني الذي يعبر عن الحل لهذه المشكلة هو كما يلي[1]:



إن أية نقطة داخـل الشـكل الربـاعي (المسـتوى R) تمثـل الحـل الممكـن وإن النقاط المتطرفة، أ، ب، جـ، د. تمثل الحل الأفضل وإن أحـد هـذه النقـاط وعـلى الأغلب النقطة (د) التي عادة تكون أبعد ما يكون عن نقطـة الأصـل هـي التـي تمثل الحل الأمثل. إن العلاقة بين الحلول الثلاث تتضح من خلال الشـكل رقـم (1–7) الوارد سابقاً.

(1) تم اقتباس فكرة هذه النظرية من المرجع باللغة البولندية:

W. sadowski "Teoria Podejmowania Decizij" PWN, W-Wa 1980.
Graphical Method/linear Programming.

نظرية رقم (2) **Theory no. (2)**

إن وجود عدد من البدائل اللازمة من المعلومات والموارد لاتخاذ القرارات من شأنه أن يحدد طبيعة القرار المتخذ وذلك كما يلي:

البديل الممكن ← القرار الممكنة

البديل الأفضل ← القرار الأفضل

البديل الأمثل ← القرار الأمثل

(وذلك على افتراض أن حسن التصرف واقع والأداء ثابت).

نظرية رقم (3) **Theory no. (3)**

وهي نظرية القرار وعلاقتها بنوعية الحل، وتنص هذه النظرية على أن هنالك علاقة وارتباط بين نوعية القرار ونوعية الحل، فإذا ما كان القرار أمثلاً، فإن الحل الذي يتم الحصول عليه سوف يكون أمثلاً وهكذا بالنسبة للأنواع الأخرى من القرارات والحلول، كما هو واضح في الشكل التالي:

قرار أمثل ← حل أمثل

قرار أفضل ← حل أفضل

قرار ممكن ← حل ممكن

نظرية رقم (4) **Theory no. (4)**

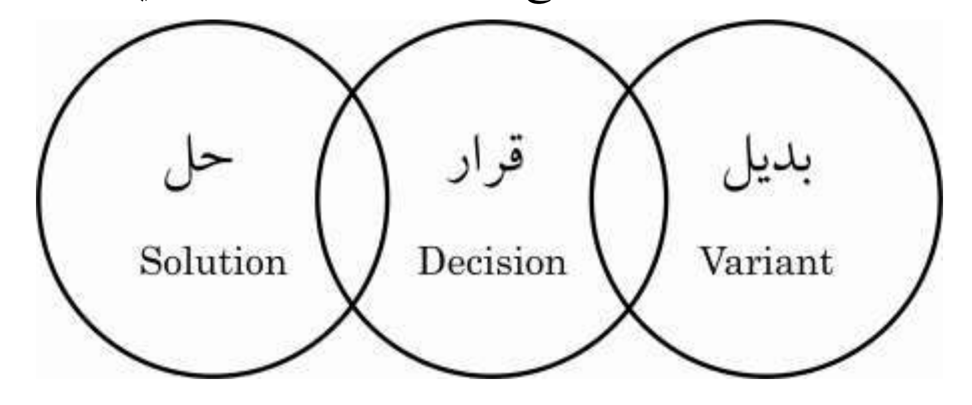
تنص هذه النظرية على العلاقة بين بدائل المعلومات والموارد من جهة، ونوعية الحلول من جهة أخرى، حيث إذا تم اعتماد بديل أمثل من المعلومات والموارد المتاحة وكان هناك توجه لاتخاذ القرار الأمثل، فإن ذلك يؤدي إلى الحصول على الحل الأمثل، وهكذا بالنسبة للأنواع الأخرى من البدائل والحلول، كما هو واضح أدناه:

بديل ممكن ← قرار ممكن ← حل ممكن

بديل أفضل ← قرار أفضل ← حل أفضل

بديل أمثل ← قرار أمثل ← حل أمثل

ويظهر من أعلاه دور القرار الأساسي في هذه السلسلة المنطقية من التناسب والعلاقات التبادلية، ويمكن توضيح ذلك أيضاً من خلال الشكل التالي:



نظرية رقم (5) **Theory no. (5)**

تنص هذه النظرية على أن القرار الرشيد على الأغلب يؤدي إلى الحل الأمثل في حين أن القرار غير الرشيد حتماً لا يؤدي إلى الحل الأمثل.

أن هذه النظريات لا يقتصر تطبيقها على الطريقة البيانية، بل هي تشمل أيضاً الطريقة الجبرية والطريقة العامة وغيرها من الطرق التي سوف يرد ذكرها لاحقاً، إلا أن الطريقة الأولى تتميز بكونها أكثر توضيحاً لفكرة التداخل بين الحلول وبالتالي عرض وتوضيح موضع هذه الحلول على مساحة الحلول الممكنة Feasible Solution Region ®.

وفي الفصول القادمة سوف ترد تطبيقات مختلفة لهذه النظريات وكذلك للأساليب الكمية المختلفة التي تهدف إلى حالة الأمثلية.

أسئلـــة الفصـــل الأول

س1: تكلم عن مفهوم ومداخل (مناهج) دراسة إدارة الأعمال.

س2: ما هي أهمية ومفهوم المنهج الكمي لدراسة إدارة الأعمال؟

س3: ما هي أنواع أساليب المنهج الكمي وما هي أهم تقسيماتها؟

س4: ما هو مفهوم القرار؟

س5: ما المقصود باتخاذ القرارات الإدارية؟

س6: ما هي نوع القرارات؟

س7: تكلم عن نماذج اتخاذ القرارات؟

س8: ما المقصود بفاعلية القرار؟

س9: ما هي مفهوم القرار الرشيد وما هي معوقات الوصول إليه؟

س10: ما هي أنماط اتخاذ القرارات؟

س11: تكلم عن عملية اتخاذ القرار في منظمات الأعمال الإنتاجية والخدمية؟

س12: ما هو مفهوم الأمثلية وما هي النظريات إلى جاءت بصددها؟

الفصل الثاني
اتخاذ القرار الأمثل باستخدام نماذج البرمجة الخطية

1.2. أنواع نماذج البرمجة الخطية المستخدمة في اتخاذ القرار الأمثل

1.1.2. نموذج تحديد خطة الإنتاج في منظمة الأعمال

2.1.2. نموذج عملية قطع وقص المواد الأولية

3.1.2. نموذج استغلال وقت تشغيل المكائن

4.1.2. نموذج اختيار البدائل الاستثمارية

5.1.2. نموذج توزيع المهام الإنتاجية لتخصص صناعي معين بين المدن

6.1.2. نموذج استغلال وسائل النقل

7.1.2. نموذج توزيع المجمعات السكنية

8.1.2. نموذج اختيار بديل شراء أجهزة

2.2. الطريقة البيانية Graphical Method في حل نماذج البرمجة الخطية

3.2. طريقة السمبلكس Simplex Method في حل نماذج البرمجة الخطية

1.3.2. أنواع طرق الحل وفق الطريقة المبسطة (السمبلكس).

2.3.2. استخدام الأسلوب اليدوي (الطريقة الاعتيادية أو المعدلة).

- أسئلة الفصل الثاني

2

الفصل الثاني

اتخاذ القرار الأمثل باستخدام نماذج البرمجة الخطيــة

1.2. أنـواع نمـاذج البرمجـة الخطيـة المسـتخدمة فـي اتخـاذ القرار الأمثل

في الواقـع العمـلي يواجـه متخـذ القـرار في مـنظمات الأعـمال ذات الطبيعـة الإنتاجية والخدمية أنواع مختلفة من المشاكل. وأهم هذه المشاكل وأكثرها شيوعاً في الواقع العملي هي ما يلي:

- تحديد خطة الإنتاج.
- قطع وقص المواد الأولية.
- استغلال وقت تشغيل المكائن.
- اختيار البدائل الاستثمارية.
- توزيع الإنتاج حسب القطاعات.
- ترشيد استغلال وسائل النقل.
- الاختيار الأمثل لمواقع السكن.
- اختيار أفضل العطاءات لشراء المكائن.
- تحديد الاجراءات المثلى في صياغة النموذج

لكل مشكلة مما تقدم يجري صياغة النموذج الرياضي بالشكل الذي يعبر عن طبيعتها وخصائصها وبها يمكن متخذ القرار في المنظمة من اتخاذ القرار الأمثل. وفيما يلي عرض للنماذج الرياضية التي ينبغي صياغتها لحل المشاكل التي تواجهها منظمة الأعمال مع الأخذ بنظر الاعتبار خصائص كل مشكلة من المشاكل المذكورة أعلاه.

1.1.2. نموذج تحديد خطة الإنتاج في منظمة الأعمال

إن أية منظمة أعمال إنتاجية تطرح أنواع مختلفة من المنتجات يكون بإمكانها وضع خطط للإنتاج مختلفة بما يتفق ونوعية المنتجات المطلوبة. وخطط الإنتاج لا تكون عادة على مستوى واحد من الكفاءة والفاعلية. ويكون من مهمة متخذ القرار في هذه الحالة اختيار خطة الإنتاج المثلى التي تؤمن نوعية وكمية الإنتاج المستهدفة في ظل الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج الأساسية المتاحة. ويمكن توضيح هذه الفكرة من خلال المشكلة التالية التي تتعلق بإحدى المنظمات الإنتاجية:

منظمة إنتاجية تمتلك (m) من مستلزمات الإنتاج الأساسية بالنوعيات ($S_1, S_2 , ..., S_m$) والتي تتوفر بالكميات المتاحة ($b_1, b_2 , ..., b_m$)، تستطيع أن تطرح (n) من أنواع المنتجات. وتستهلك كميات من مستلزمات الإنتاج الأساسية مقدارها (a_{ij}) (حيث أن : $i , 1 , 2, ..., m , j = 1 , 2 , ..., n$) ذلك على أساس (i) من مستلزمات الإنتاج تستهلك لطرح المنتجات التي عددها (j). إن المنظمة المذكورة إذا تمكنت من بيع المنتجات (j) فإنها تحقق ربح مقداره (C_j)

وحدة نقدية. في ظل هذه البيانات ينبغي صياغة نموذج رياضي بموجبه يستطيع متخذ القرار اختيار خطة الإنتاج التي تحقق الكميات والنوعيات المطلوبة من الإنتاج وبما يؤمن الحصول على عائد ربح ممكن. وينبغي أن يتم ذلك في ظل الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج الأساسية.

الحل: نفرض أن (X_j) (حيث $j = 1 , 2 , ..., n$) هو حجم الإنتاج من النوع (j) وعليه فإن استهلاك المقدار (b_i) من مستلزمات الإنتاج الأساسية عند طرح كافة المنتجات وبالكميات (X_j) يمكن أن يعبر عنه من خلال العلاقة الرياضية التالية:

$$a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + a_{i3} X_3 + ... + a_{in} X_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j$$

(حيث $i = 1 , 2 , ..., m$)

وإذا علمنا أن المتوفر من مستلزمات الإنتاج الأساسية محدودة وغير متاح منه بشكل مطلق، فإن التعبير عن ذلك ينبغي أن يكون من خلال العلاقة التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \leq b_i$$

(حيث $i = 1 , 2 , ..., m$)

الربح الذي يمكن الحصول عليه من بيع المنتجات يعبر عنه من خلال المعادلة التالية:

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_n X_x = \sum_{j=i}^{n} C_j X_j$$

إن النموذج الرياضي الذي على أساسه يتم تحديد خطة الإنتاج في المنظمة يمكن إجماله من خلال العلاقات الرياضية التالية:

المطلوب: إيجاد قيم المتغيرات الأساسية $X_1 , X_2 , ..., X_n$ وذلك في ظل تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq b_i \quad (i = 1, 2, ..., m)$$
$$X_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n)$$

وبما يؤدي إلى تعظيم قيمة دالة الهدف التالية:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

2.1.2. نموذج عملية قطع وقص المواد الأولية

في الكثير من منظمات الأعمال الصناعية (على سبيل المثال في مصانع السفن، مصانع الألبسة الجاهزة، مصانع الأثاث، وما شابه ذلك). تتطلب العملية الإنتاجية فيها قطع المواد الأولية (صفائح حديدية، أقمشة، ألواح خشبية وغير ذلك). إلى أجزاء محددة بما يتفق ومتطلبات العملية الإنتاجية المذكورة. وهنا تبرز مشكلة اتخاذ القرار الأمثل المتعلق بقطع المواد الأولية وقصها بالصيغة التي تؤمن تحقيق متطلبات الإنتاج من أجزاء المواد الأولية وبأقل قدر ممكن من الضياعات والتلف، والمشكلة التالية توضح هذه الفكرة:

منظمة أعمال صناعية لديها مجموعة من قطع مواد أولية بقياسات ثابتة وهي تسعى للحصول على (m) من الأجزاء المختلفة من هذه المواد. وهناك إمكانية

لتأمين هذه الأجزاء من قطعة واحدة من المـواد الأوليـة بتطبيـق (n) مـن طـرق القطع المختلفة. أي أن المطلوب هو تقطيع (bi) من ما هو متوفر من قطع المـواد الأولية مـن النـوع (i) حيـث أن (i = 1, 2,……, m). إن تنفيـذ عمليـة القطـع والقص للمـواد الأوليـة مـن النـوع j (حيـث أن j = 1 , 2, ….., n) يـؤدي إلى الحصول على aij مـن أجـزاء المـواد اللازمـة مـن النـوع (i) وتكـون المخلفـات الضياعات من هذه المواد الأولية مساوية إلى (Cj) وحدة.

استناداً إلى ما تقدم ينبغي صياغة النموذج الرياضي لهذه المشكلة، الـذي عـلى أساسه يمكن للمنظمة المذكورة أن تتوصل إلى أسلوب القطـع والقـص الأمثـل الذي يؤمن بقاء أقل كمية ممكنة من المخلفات والضياعات من المواد الأولية.

الحل: نفرض أن (Xj) حيث (j = 1, 2, …., n) هو عدد قطع المواد الأولية التـي تؤمن حاجة العملية الإنتاجية في المنظمة فيما لو تم قطعها بعـدد مـن الطـرق مقدارها j. إن العامل (aij) يمكن أن نعبر عنه من خلال المصفوفة التالية:

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

إن أي صف من المصفوفة أعلاه (i) يعني عدد القطع التـي يمكـن الحصـول عليها عند قطع المواد الأولية بكافة الطـرق الممكنـة. أمـا بالنسـبة للأعمـدة (j) الواردة في المصفوفة فإنها تمثل أسلوب أو بدائل القطع التي يعبر عنها من خـلال

الرمـز j (حيـث أن: $j = 1, 2, \ldots\ldots n$) التـي بموجبهـا تنفـذ عمليـة القطـع. إن الشروط التي تحكم هذه المشكلة ترتبط بعدد أنواع القطع المحددة من قبل متخذ القرار، ويمكن أن يعبر عن هذه الشروط كما يلي:

$$
\begin{aligned}
a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + a_{13} X_3 + \ldots\ldots + a_{1n} X_n &= b_1 \\
a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + a_{23} X_3 + \ldots\ldots + a_{2n} X_n &= b_2 \\
a_{31} X_1 + a_{32} X_2 + a_{33} X_3 + \ldots\ldots + a_{3n} X_n &= b_3 \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad & \ldots \\
a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + a_{m3} X_3 + \ldots\ldots + a_{mn} X_n &= b_m
\end{aligned}
$$

ويمكن التعبير عن ذلك أيضاً من خلال العلاقة الرياضية المختصرة التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \qquad (\text{حيث أن } i = 1, 2, \ldots\ldots, m)$$

إذا افترضنا أن هناك عدد من القطع يتم الحصول عليها عند تطبيـق أسـلوب القطع الأول (X_1) وأسلوب القطع الثاني (X_2)، وهكذا، فإن هذا الأمر سـوف يؤدي بالنتيجة إلى الحصول على فضلات ومخلفات مقدارها (C_1) مـن أسـلوب القطع الأول و (C_2) من أسلوب القطع الثاني وهكذا. ويمكن أن نوضـح ذلـك بالنسبة لكافة أساليب القطع من خلال المعادلة التالية (دالة الهـدف) التـي تعـبر عن مقدار الفضلات والمخلفات الكلية الناجمة من كافة أساليب القطع المطبقة:

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots\ldots + C_n X_n = \sum_{j=i}^{n} C_j X_j$$

مما تقدم نستنتج بأن المطلوب هو تحديد قيم للمتغيرات الأساسية (X_1 , X_2 , ... X_n) بأرقام كاملة وصحيحة. ويتم ذلك في ظل تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \qquad \text{(i = 1 , 2 , ..., m : حيث أن)}$$

$$Xj = 0 , 1, 2 , ... \qquad \text{(j = 1 , 2 , ..., n : حيث أن)}$$

وبما يؤمن تحقيق أقل قيمة لدالة الهدف التالية:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

مثال رقم (1): منظمة إنتاجية متخصصة في خياطة الألبسة الجاهزة قررت تنفيذ أمر معين بموجبه يتم تحويل رولات أقمشة معينة ذات قياسات ثابتة إلى قسم النشر والقطع الذي يعمد بدوره إلى تقسيم هذه الرولات إلى قطع معينة يطلق عليها اسم النشره ومن كل واحدة من هذه النشرات يتم الحصول على 2 قطعة (وهو ما يطلق عليه اسم التصريف) من السروال نوع (A) و (5) قطعة من السروال نوع (B) (حيث أن القطعة الواحدة في A أو B تكفي لإنتاج سروال واحد فقط).

الجدول التالي يوضح عدد القطع (التصريف) المطلوبة لإنتاج السروال من النوع A و B التي يمكن الحصول عليها من كل أسلوب قطع مع مقدار كمية الفضلات والمخلفات الناتجة عن ذلك.

جدول رقم (2-1) بيانات المشكلة

الإنتاج المطلوب	أساليب القطع				
	رقم (1)	رقم (2)	رقم (3)	رقم (4)	رقم (5)
سروال نوع A	4	3	2	1	0
سروال نوع B	0	1	3	4	5
الفضلات مقاسة بالسنتمترات	8	3	1	2	6

إن المطلوب هو صياغة نموذج رياضي لهذه المشكلة بما يؤدي إلى تحديد أساليب القطع الأمثل لرولات الأقمشة الذي يؤمن الحصول على (90) نشرة التي منها يتم الحصول على السروال من النوع (A) والنوع (B) وبأقل قيمة ممكنة من الفضلات.

الحل: إن حل هذه المشكلة يتطلب في البداية تسمية رموز للقيم المجهولة والتي تمثل عدد قطع الأقمشة الواجب توفيرها لأمر العمل المذكور التي سوف تقطع باستخدام أساليب القطع (رقم 1، رقم 2، رقم 3، رقم 4، رقم 5) وذلك كما يلي: نفرض أن:

$X_1 \leftarrow$ عدد القطع من السروال A ، B التي يمكن الحصول عليها في ظل أسلوب القطع رقم (1).

$X_2 \leftarrow$ عدد القطع من السروال A ، B التي يمكن الحصول عليها في ظل أسلوب القطع رقم (2).

$X_3 \leftarrow$ عدد القطع من السروال A ، B التي يمكن الحصول عليها في ظل أسلوب القطع رقم (3).

X_4 ← عدد القطع من السروال A ، B التي يمكن الحصول عليها في ظل أسلوب القطع رقم (4).

X_5 ← عدد القطع من السروال A ، B التي يمكن الحصول عليها في ظل أسلوب القطع رقم (5).

بموجب هذه البيانات فإن من المفروض هو الحصول على ما يلي:

(2) * (90) سروال من النوع A.

(5) * (90) سروال من النوع B.

وعلى هذا الأساس فإن المتغيرات الأساسية ينبغي أن تدخل في صياغة الشروط التالية:

$4X_1 + 3X_2 + 2X_3 + 1X_4 + 0X_5 = 180$ قيد السروال A.

$0X_1 + 1X_2 + 3X_3 + 4X_4 + 5X_5 = 450$ قيد السروال B.

إن تطبيق أساليب القطع الخمسة المذكورة أعلاه يؤدي إلى تحقق مقدار من الفضلات والمخلفات، يتضح من خلال المعادلة (دالة الهدف) التالية:

$$Z = 8X_1 + 3X_2 + 1X_3 + 2X_4 + 6X_5 \longrightarrow Min$$

حيث أن Z تمثل المقدار الكلي للفضلات والمخلفات التي ينبغي أن تكون أقل ما يمكن. وبخصوص قيم المجاهيل (X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5) فإنها ينبغي أن تكون أرقاماً صحيحة خالية من الكسور.

مثال رقم (2) : منظمة أعمال إنتاجية متخصص بصناعة الألبسة النسائية الجاهزة ترغب في تنفيذ أمر عمل معين. وقد توفرت البيانات التالية:

- تملك هذه المنظمة رولات من القماش ذات قياسات معينة هي $(P_1 , P_2,\ldots, P_m)$.
- عدد الأمتار في هذه الرولات ومن كل قياس يتمثل $(a_1 , a_2 ,\ldots, a_m)$.

يتم في البداية تحويل رولات الأقمشة من المخازن إلى قسم النشر والقص. وفي هذا القسم الأخير يتم الحصول على عدد من النشرات[1] حيث أن كل نشرة تتكون من عدد من القطع وذلك كما يلي:

$K_1 \leftarrow$ عدد قطع النشرة رقم (1).

$K_2 \leftarrow$ عدد قطع النشرة رقم (2).

⋮ ⋮

$K_L \leftarrow$ عدد قطع النشرة رقم (L).

من البيانات الأخرى المتوفرة عن المشكلة هي:

- إن أي رولة من الرولات المتوفرة p_i (حيث أن: $i = 1, 2, \ldots, m$) يمكن أن تقطع بـ (n) من الطرق.
- عند قطع الرولات P_i بـ j من الطرق (حيث أن: $j = 1 , 2, \ldots, n$) نحصل على (a_{ijs}) من القطع من الموديل S.

---

(1) النشرة هي قطعة القماش التي تمثل الإطار العام الذي منه يتم الحصول على القماش اللازم للقياس المطلوب ومن النشرة الواحدة يمكن الحصول على القطع اللازمة لخياطة بدلة نسائية واحدة أو أكثر.

المطلوب: وضع صيغة نموذج رياضي للمشكلة يتم بموجبه معالجة عملية تقطيع الرولات (P_1 , P_2, ..., P_m) المتوفرة لدى المنظمة المذكورة، بما يؤمن الحصول على أكبر عدد ممكن من النشرات المطلوبة لتنفيذ أمر العمل.

الحل: نفرض أن:

$X_{ij} \leftarrow$ عدد الرولات P_i التي سوف تقطع بموجب j من الطرق.

1) من مجموعة الرولات P_i التي يتم تقطيعها حسب الطريقة (j) نحصل على ما يلي:

$a_{ijs}\ x_{ij}$

وهو يمثل عدد القطع الكلية من الموديل S

حيث أن:

$a_{ijs} \leftarrow$ عدد القطع الكلية من الموديل S

$0 \leq S \leq 1$

2) من مجموعة الرولات P_i المقطعة بكافة الطرق نحصل على ما يلي:

$$a_{i1S}\ X_{i1} + a_{i2S}\ X_{i2} + ...a_{inS}\ X_{in} = \sum_{j=i}^{n} a_{ijS}\ X_{ij}$$

قطعة في الموديل S

3) من الرولات P_1 , P_2 , ..., P, المقطعة بكافة الطرق نحصل على ما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m}\ \sum_{j=1}^{n} a_{ijS}\ X_{ij}$$

قطعة من الموديل S

بما أن النشرة الواحدة مطلوب منها الحصول على عدد من القطع مقدارها K_s وذلك من النوع S لذلك فإن عدد النشرات يحسب من خلال العلاقة التالية:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijS} X_{ij}}{K_S} = P_S$$

بما أن في تركيب النشرة الواحدة يدخل Z من القطع المختلفة، لذلك فإن في مجموعة النشرات وطبقاً لبرنامج القطع X_{ij} ينبغي أن نحصل على ما يلي:

$$Min\left|P_1, P_2, P_3, \ldots P_S \ldots P_Z\right| = Min\left|\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijS} X_{ij}}{K_1} \ldots \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijS} X_{ij}}{K_S} \ldots \frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijS} X_{ij}}{K_Z} \ldots\right|$$ وحدة

ولو أدخلنا متغير إضافي وهو (حيث أن: 0 m..... ,3 , 2 , 1 , = λ)

بحيث يكون ما يلي:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij1} X_{ij}}{K_1} \geq \lambda$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij2} X_{ij}}{K_2} \geq \lambda$$

$$\vdots$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijS} X_{ij}}{K_S} \geq \lambda$$

$$\vdots$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ijZ} X_{ij}}{K_Z} \geq \lambda$$

حيث أن:

إن المتغير λ يمثل عدد النشرات المطلوبة

النموذج السابق يمكن إعادة صياغته كما يلي:

$Z = \lambda \longrightarrow \max .$ (دالة الهدف)

في ظل المحددات التالية:

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ijS} X_{ij}}{K_S} \geq \lambda \text{ .... } (1)$$

حيث أن:

$(S = 1, 2, ..., Z)$

وأن:

$(\lambda = 0, 1, 2, ...)$

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_1 \text{ .... } (2)$$

حيث أن:

$(i = 1 , 2 , ..., m)$

$$X_{ij} = 0, 1 , 2 , \text{ .... } (3)$$

حيث أن:

$$\begin{bmatrix} i = 1 , 2 , ..., m \\ j = 1 , 2 , ..., n \end{bmatrix}$$

3.1.2. نموذج استغلال وقت تشغيل المكائن[1]

تستخدم النماذج الرياضية وبالذات الخطية منها، في معالجة مشكلة استغلال وقت تشغيل المكائن على نطاق الاقتصاد الوطني ككل باعتباره منظمة واحدة. وهو أمر من الناحية العلمية يشوبه الكثير من المعوقات، لذلك فإن الاستخدام الأكثر شيوع للنماذج الخطية هو لاتخاذ القرار الأمثل بنطاق أضيق وذلك من خلال استغلال وقت تشغيل المكائن بين الخطوط الإنتاجية للمنظمة الواحدة. وذلك كما هو واضح في النماذج الرياضية المقدمة في الفقرات أدناه:

1.3.1.2. النموذج الرياضي الخطي للاستغلال الأمثل لوقت تشغيل المكائن في منظمات الأعمال الإنتاجية

إن فكرة صياغة هكذا نموذج رياضي، تتضح من خلال المشكلة التالية:

منظمة أعمال إنتاجية معينة، تتمكن من إنتاج N من الوحدات المنتجة باستغلال M ماكنة متوفرة لديها. وباستطاعة المنظمة المذكورة اعتماد K من خطط وأساليب الإنتاج المتاحة بالنسبة لكل منتج من المنتجات التي عددها N (حيث أن: $n = 1 , 2 , ... N$).

من خلال فترة زمنية مقدارها a_{knm} وحدة زمنية يتم إنتاج n من المنتجات باستغلال m ماكنة (حيث أن $m = 1 , 2, ..., M$) مع اعتماد الأسلوب الإنتاجي

(1) وقت تشغيل المكائن يمكن أن يعبر عنه بأنه هو الطاقة التشغيلية المتاحة للمنظمة.

K (حيث أن K .... , 2 , 1 = k) شهرياً على الماكنة m يمكن إنتاج مقدار من المنتجات في خلال فترة زمنية مقدارها b_m (حيث أن: M ...., 2 , 1 : m) وحدة زمنية.

وأخيراً من الوحدة الواحدة من المنتوج n المعدة في ظل m أسلوب الإنتاج، يمكن للمنظمة أن تحصل على ربح بها يساوي C_{kn} [حيث أن (K ,... , 2 , 1 = k) (N ,.... , 2 , 1 = n) وحدة نقدية.

المطلوب: صياغة نموذج رياضي يساعد متخذ القرار في وضع خطة لاستغلال وقت تشغيل المكائن وفق الصيغ المثلى لذلك مع اعتماد رقم الأرباح الكلية المتحقق كمؤشر لتحديد هذه الصيغة.

الحل: نفرض أن X_{kn} (حيث أن : N ,..... , 2 , 1 = n ,K ,...... ,2 , 1 = k) هو حجم الإنتاج لـ n من المنتجات المتحقق في ظل K أسلوب إنتاجي. إن الرمز X_{kn} هو بمثابة المتغير الأساسي في المشكلة والذي ينبغي أن يحقق الشروط التالية:

$$X_{kn} \geq 0 \qquad (k=1,2,......,K, n=1,2,....N)$$

وهو يمثل الإنتاج المتحقق بالكمية X_{kn} وحدة على m من المكائن، والذي يمكن الحصول عليه خلال الفترة الزمنية المحسوبة كما يلي:

$$T_{nk} = a_{kmn} \ X_{kn} \quad (k=1,2,......,K.\ m=1,2,....,M.\ n=1,2,....N)$$

وحدة زمنية

إن الإنتاج المتحقق بالكمية X_{kn} وحدة على m من المكائن، يمكن أن يتم بكافة الطرق إذا تم استغلال الوقت طبقاً للعلاقة الرياضية التالية:

$$T_n = \sum_{k=1}^{K} T_{nk} = \sum_{k=1}^{K} a_{Kmn} \ X_{Km} \quad (m=1,2,....,M.\ n=1,2,....,N)$$

وحدة زمنية على الماكنة m.

إذا تقرر تنفيذ حجم إنتاجي معين بمقدار X_{kn} وذلك على m من المكائن وذلك لكافة الأنواع الممكنة من المنتجات N وبكافة الوسائل والخطط المتاحة، فإن ذلك يتطلب مقدار من الوقت يحسب من خلال العلاقة الرياضية التالية:

$$\sum_{n=1}^{N} T_n = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} a_{kmn} \ X_{kn} \qquad (m=1,2,....,M)$$

وحد زمنية

لما كان بالإمكان صنع منتجات باستخدام m من المكائن وذلك خلال الشهر الواحد وبما لا يتجاوز b_m وحدة زمنية، فإن ذلك ينبغي أن يتم في ظل تحقيق الشرط التالي:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{K} a_{kmn} \ X_{kn} \leq b_m \qquad (m=1,2,....,M)$$

الربح الذي يمكن أن تحصل عليه المنظمة من إنتاج X_{kn} وحدة من المنتجات بالأنواع n وبتطبيق k من أساليب وخطط الإنتاج يبلغ:

$$Z_{Kn} = C_{Kn} \ X_{Kn} \quad (k=1,2,......,K, n=1,2,.....,N)$$

أما بالنسبة للربح الذي يمكن أن تحصل عليه المنظمة عند إنتاج n من أنواع المنتجات وباستخدام كافة الأساليب والخطط الإنتاجية المتاحة أمامه يحسب كالآتي:

$$Z_n = \sum_{K=1}^{K} Z_{Kn} = \sum_{K=1}^{N} C_{kn} \; X_{kn} \qquad (n = 1, 2, ..., N)$$

وبالنسبة للربح الكلي الذي يتم الحصول عليه نتيجة لإنتاج كافة الأنواع الممكنة من المنتجات فإنه يحسب من العلاقة الرياضية التالية:

$$Z = \sum_{n=1}^{N} Z_n = \sum_{n=1}^{N} \; \sum_{k=1}^{K} C_{kn} \; X_{kn}$$

وبشكل عام يمكن صياغة النموذج الرياضي للاستغلال الأمثل لوقت تشغيل المكائن الإنتاجية في المنظمة وذلك كما يلي:

المطلوب: إيجاد قيم المتغيرات الأساسية التالية:

$$X_{Kn}(k = 1\ ,\ 2, ..., K\ ,\ n = 1\ ,\ 2, ..., N)$$

وذلك بما يحقق الشروط التالية:

$$\sum_{n=1}^{N} \; \sum_{K=1}^{K} a_{Kmn} \; X_{Kn} \leq b_m \qquad (m = 1, 2, ..., M)$$

$$X_{Kn} \geq 0 \;\; (k = 1, 2, ..., K, n = 1, 2, ..., N)$$

مع جعل قيمة دالة الهدف التالية أعلى ما يمكن:

$$Z = \sum_{n=1}^{N} \; \sum_{k=1}^{K} C_{Kn} \; X_{kn}$$

2.3.1.2. النموذج الرياضي للتوزيع الأمثل للمهام الإنتاجية بين المكائن مع الأخذ بنظر الاعتبار وقت تهيئة المكائن للعمل:

لتوضيح فكرة صياغة هكذا نموذج رياضي نعتمد المشكلة التالية:

منظمة أعمال إنتاجية معينة متخصصة بإنتاج N من أنواع المنتجات متوفر لديها M من المكائن. في خلال شهر الماكنة m (حيث أن: $m = 1 , 2 , ..., M$) يمكن أن تستخدم في تكوين المنتجات في خلال t_m وحدة زمنية. شهرياً مطلوب تكوين a_n (حيث أن: $n = 1 , 2,.... , N$) من المنتجات من النوع n. إن الوقت اللازم لتكون n نوع من المنتجات باستخدام الماكنة m هو t_{mn} أما وقت تهيئة الماكنة m للعمل فهو λ_{mn} وحدة زمنية. وإن تكاليف تكوين n من أنواع المنتجات على الماكنة m يبلغ C_{nm} في حين تبلغ كلفة تهيئة الماكنة m للعمل d_{nm} وحدة نقدية.

المطلوب: تحديد التوزيع الأمثل للمهام الإنتاجية بين المكائن المتاحة لدى المنظمة المذكورة مع اعتماد التكاليف الشهرية للإنتاج إضافة إلى تكاليف تهيئة الماكنة للعمل كمؤشر للأمثلية.

الحل: $X_{mn} \leftarrow$ نفرض أن كمية المنتجات من النوع (n) على الماكنة من النوع (m) علماً بأن الكمية المذكورة يجب أن تكون:

1) ذات قيمة موجبة.

2) أعداد صحيحة (خالية من الكسور).

أي أن: $X_{nm} = 0 , 1 , 2, ...,$.

$T_{mn}X_{mn}$ ← وقت تنفيذ عملية صنع المنتجات بالكمية X_{nm} من النوع (n) الماكنة (m).

إن الوقت الكلي الذي يتضمن وقت تهيئة الماكنة (تشغيل، تهيئة المادة الأولية) بالإضافة إلى الوقت المصروف فعلاً بالإنتاج يحسب كما يلي:

$$T_{mn} (X_{mn}) = t_{mn} X_{mn} + \lambda_{mn}$$

حيث أن : λ_{mn} ← وقت تهيئة الماكنة.

وبنفس الطريقة يمكن التعبير عن ذلك كما يلي:

$$C_{mn} (X_{mn}) = C_{mn} X_{mn} + d_{mn}$$

حيث أن: d_{mn} ← وهو كلفة الوقت اللازم لتهيئة الماكنة.

λ_{mn} ← قيمة افتراضية

بشكل عام يمكن صياغة النموذج الرياضي للمشكلة كما يلي:

المطلوب: تحديد قيمة المتغير X_{mn}

حيث أن:

$m = 1 , 2 , ... , M$
$n = 1 , 2 , ..., N$

الذي يحقق الشروط التالية:

$$\sum_{m=1}^{m} (T_{mn} X_{mn} + \lambda_{mn} \ y_{mn}) \leq T_{mn}$$

حيث أن:

$$(m = 1 , 2 , ... , M)$$

$$X_{mn} \leq M_{mn} \ \lambda_{mn}$$
$$X_{mn} \leq 0 , 1 , 2 , ...$$

في ظل دالة الهدف التالية:

$$K = \sum_{m=1}^{m} \sum_{n=1}^{N} (C_{mn} X_{mn} + d_{mn} y_{mn})$$

علماً بأن:

$$M_{nm} = Min \begin{Bmatrix} T_m - \lambda_{mn} \ a_n \\ T_{mn} \end{Bmatrix}$$ إذا كان

$$\lambda_{nm} = \begin{Bmatrix} 0 \longrightarrow X_{mn} = 0 \\ 1 \longrightarrow X_{mn} > 0 \end{Bmatrix}$$ إذا كان

4.1.2. نموذج اختيار البدائل الاستثمارية

من المهام الأساسية لمتخذ القرار هو التحقق من وجود البدائل ومن ثم فرزها وتصنيفها والمقارنة بينها كخطوة أولى من أجل اختيار البديل الأمثل الذي يضمن تحقيق أهداف المنظمة بكفاءة عالية. يتطلب ذلك صياغة نموذج رياضي يتم على أساسه اتخاذ القرار الأمثل الذي يؤدي بالنتيجة إلى اختيار البديل المطلوب كما هو واضح في الأمثلة أدناه:

1.4.1.2. النموذج الرياضي لاتخاذ القرار الأمثل لاختيار البديل الاستثماري على مستوى المؤسسة

يقصد بالمؤسسة هنا المنظمة الإدارية التي تنتمي إلى قطاع صناعي معين ومسؤولة من الناحية المالية والإدارية والقانونية عن نشاط مجموعة منظمات أعمال متشابهة في التخصص. ولو أن إدارة إحدى المؤسسات العاملة في قطاع صناعي معين قررت تخصيص مبلغ معين مقداره W لتنفيذ مشايع استثمارية. إن هذه المشاريع تتضمن إنشاء عدد آخر من منظمات الأعمال الصناعية في مواقع جغرافية جديدة التي سوف يناط بها إنتاج N من أنواع المنتجات. إن المنتجات من النوع n (حيث أن: $n = 1 , 2 , \ldots , N$) يمكن تكوينها في منظمات مختلفة التي عددها Mn . لكل m (n) منظمة إنتاجية [حيث أن: $m (n) = 1 , 2, \ldots, M_n$] التي تقوم بإنتاج (n) من أنواع المنتجات تم إعداد $I_{m(n)}$ بدائل استثمارية مختلفة.

في المنظمة m (n) التي فيها يتم تكوين n من المنتجات، يحتاج فيها البدائل الاستثمارية $i_{m(n)}$ (حيث أن: $i_{m(n)} = 1 , 2 , \ldots, Im(n)$) إلى عدد من الوحدات النقدية مقدارها $W_{m(n)}$. إن الطاقة الإنتاجية السنوية في المنظمة m (n) في ظل Im(n) بديل استثماري تبلغ $d_{m(n)}$ وحدة من (n) أنواع المنتجات.

إن تكاليف الوحدة الواحدة من n المنتجات في المنظمة m(n) في ظل $i_{m(n)}$ بديل استثماري يبلغ $a_{m(n)}$ وحدة نقدية.

تتمثل قيمة الوحدة الواحدة من n المنتجات في المنظمة m(n) في ظل $i_{m(n)}$ بديل استثماري من خلال الرمز $C_{m(n)}$ وحدة نقدية. أما الإنتاج السنوي فإنه ينبغي أن يساوي على الأقل b_n وحدة n من المنتجات.

المطلوب: صياغة نموذج رياضي يساعد في اتخاذ القرار الأمثل المتعلق باختيار البديل الاستثماري في كل منظمة. ويؤخذ بعين الاعتبار في هذه الحالة كمؤشر للأمثلية مقدار العوائد أو الإيرادات النقدية الكلية المتحققة في كل سنة بالنسبة لكل منظمة مرتبطة بالمؤسسة المذكورة.

الحل: نفرض أن $X_{im(n)}$ هو المتغير الأساسي، الذي يعني أن في المنظمة m(n) يتم اختيار البديل الاستمثاري Im(n).

إن المتغير $X_{im\,(n)}$ يأخذ قيم اثنين فقط وهي أما (0) أو (1).

علماً بأن:

- إذا كان $X_{im(n)} = 1$ فإن ذلك يعني أن في المنظمة m (n) يتم اختيار البديل الاستثماري $I_{m(n)}$.
- إذا كان $X_{im(n)} = 0$ فإن ذلك يعني أن في المنظمة m (n) لن يتم اختيار البديل الاستثماري $I_{m(n)}$.

لكل منظمة مرتبطة بالمؤسسة قيد الدرس ينبغي اختيار بديل استثمار واحد فقط، ويتم الاختيار في ظل تحقق الشرط التالي:

$$\sum_{m(n)=1}^{M(n)} X_{im(n)} \leq 1 \qquad (n=1,2,....,N, m(n)=1,2,....,M_n)$$

إن حجم الإنتاج السنوي من n من المنتجات في المنظمة m (n) في ظل البديل الاستثماري im (n) يبلغ $(d_{im(n)}\,X_{im(n)})$ وحدة. في حين أن مجموع حجم الإنتاج في ظل كافة البدائل الاستثمارية يحسب كما يلي:

$$P_{m(n)} = \sum_{i\,m(n)=1}^{1m(n)} d_{im(n)}\, X_{im(n)}$$

أما بالنسبة لحجم الإنتاج السنوي (n) من المنتجات في كافة المنظمة فإنه يحسب كما يلي:

$$\sum_{m(n)=1}^{M(n)} P_{m(n)} = \sum_{m(n)=1}^{M(n)} \sum_{i\,m(n)=1}^{1m(n)} d_{im(n)}\, X_{im(n)} \geq bn\,(n=1, 2, ..., N)$$

إن حجم الإنتاج السنوي ينبغي أن يساوي على الأقل b_n وحدة من n من المنتجات وذلك على افتراض تحقق الشرط التالي:

إن مقدار الإنفاق الاستثماري (معدات، عمل، مصاريف... الخ) المطلوب في ظل البديل الاستثماري $I_{m(n)}$ في المنظمة (n) m يبلغ ($W_{im(n}$ $X_{im(n)}$) وحدة نقدية أما مقدار الإنفاق الاستثماري المطلوب في ظل كافة البدائل الاستثمارية في المنظمة m(n) فإنه يحسب كما يلي:

$$W_{m(n)} = \sum_{m(n)=1}^{Mn} W_{im(n)}\; X_{im(n)}$$

إن المجموع الكلي لمقدار الإنفاق الاستثماري في كافة المنظمات التي تقوم بتكوين n من أنواع المنتجات يحسب كما يلي:

$$\sum_{i\,m(n)^{=1}}^{Mn} W_{m(n)} = \sum_{i\,m(n)=1}^{M(n)} \sum_{i\,m(n)=1}^{\text{Im}(n)} W_{im(n)}\, X_{im(n)}$$

وهذه العلاقة يمكن إعادة صياغتها لتشمل كافة أنواع المنتجات n (حيث أن: n = 1 , 2, …, N) وذلك كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m(n)=1}^{Mn} W_{m(n)} = \sum_{i(n)=1}^{N} \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)=1}^{\text{Im}(n)} W_{im(n)}\, X_{im(n)}$$

إن مجموع الإنفاق الاستثماري الموضح بالعلاقة الرياضية أعلاه يفترض به أن لا يتجاوز W وحدة نقدية، ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)=1}^{\mathrm{Im}(n)} W_{im(n)} \quad X_{im(n)} \leq W$$

التكاليف السنوية للإنتاج لـ n من المنتجات في المنظمة m(n) وذلك في ظل البديل الاستثماري m (n) تحسب كما يلي:

$$d_{im(n)} \; a_{im(n)} \; X_{im(n)}$$

وحدة نقدية وتحسب تكاليف الإنتاج بالنسبة لكافة البدائل الاستثمارية كما يلي:

$$K_{im(n)} = \sum_{im(n)=1}^{\mathrm{Im}(n)} d_{im(n)} \; a_{im(n)} \; X_{im(n)}$$

أما التكاليف الكلية السنوية التي تتحقق عند تكوين n من أنواع المنتجات ومن كافة المنتجات، فإنها تحسب كما يلي:

$$\sum_{m(n)=1}^{Mn} K_{im(n)} = \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)}^{1mn} d_{im(n)} \; a_{im(n)} \; X_{im(n)} \quad (n=1,2,....,N)$$

ويمكن إعادة صياغة هذه العلاقة لتشمل كافة أنواع المنتجات n (حيث أن: N ,.......,n = 1 , 2) وذلك كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)=1}^{\mathrm{Im}(n)} d_{im(n)} \; a_{im(n)} \; X_{im(n)}$$

إن القيمة السنوية للإنتاج n من أنواع المنتجات في المنظمة m (n) وذلك في ظل البديل الاستثماري Im(n) يساوي dim(n) Cim(n) Xim(n). أما القيمة السنوية للإنتاج في ظل كافة البدائل الاستثمارية في المنظمة m(n) فإنه يحسب كما يلي:

$$Z_{m(n)} = \sum_{im(n)=1}^{\mathrm{Im}\,n} d_{im(n)}\ C_{im(n)}\ X_{im(n)}$$

القيمة السنوية الكلية للإنتاج من n من أنواع المنتجات في كافة المنظمات فإنه يحسب كما يلي:

$$\sum_{m(n)=1}^{Mn} Z_{m(n)} = \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{m(n)=1}^{\mathrm{Im}(n)} d_{im(n)}\ C_{im(n)}\ X_{im(n)} \quad (n=1,2,....,N)$$

ويمكن إعادة صياغة هذه العلاقة لتشمل كافة أنواع المنتجات (حيث أن: N ,.......,n = 1 , 2) وذلك كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)=1}^{\mathrm{Im}(n)} d_{im(n)}\ C_{im(n)}\ X_{im(n)}$$

القيمة السنوية للإيرادات المتحققة تساوي الفرق بين المجموع الكلي لقيمة الإنتاج المتحقق والمجموع الكلي لتكاليف الإنتاج كما هو موضح في العلاقة الرياضية التالية:

$$A = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)=1}^{\mathrm{Im}(n)} d_{im(n)}\ C_{im(n)}\ X_{im(n)} - \sum_{n=1}^{N} \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)=1}^{\mathrm{Im}(n)} d_{im(n)}\ C_{im(n)}\ X_{im(n)}$$

$$A = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)=1}^{\mathrm{Im}(n)} d_{im(n)} (C_{im(n)} - a_{im(n)}) X_{im(n)}$$

ويمكن إعادة كتابة النموذج الرياضي المتعلق باتخاذ القرار الأمثل في اختيار البديل الاستثماري كما في الصيغة المختصرة التالية:

المطلوب: تحديد قيم المتغيرات الأساسية Xim(n) التي تحقق الشروط التالية:

$$X_{im(n)} \begin{cases} 1 & (n=1,2,....,N, m(n)=1,2,...,M(n), im(n),....., \mathrm{Im}(n)) \\ 0 \end{cases}$$

$$\sum_{im(n)=1}^{IM(n)} X_{im(n)} \leq 1 \qquad (n=1,2,....,N, m(n)=1,2,....,Mn)$$

$$\sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)=1}^{IM(n)} d_{im(n)} X_{im(n)} \geq b_n \qquad (n=1,2,....,N)$$

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)=1}^{IM(n)} W_{im(n)} X_{im(n)} \geq W$$

وبما يجعل من قيمة دالة الهدف التالية أكبر ما يمكن :

$$A = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m(n)=1}^{Mn} \sum_{im(n)=1}^{IM(n)} d_{im(n)} \left(C_{im(n)} - a_{im(n)}\right) X_{im(n)}$$

2.4.1.2. النموذج الرياضي لاتخاذ القرار الأمثل باختيار البديل الاستثماري لزيادة الطاقة الإنتاجية لمنظمات قائمة مرتبطة بمؤسسة واحدة:

في النموذج السابق تم معالجة مشكلة إقامة منظمة جديدة وذلك في ظل بدائل استثمارية مختلفة متاحة لدى المؤسسة. أما في هذه الفقرة فإن النموذج الرياضي يستخدم في معالجة المشكلة بالنسبة لمنظمات قائمة والبديل الاستثماري هنا يتعلق بزيادة الطاقة الإنتاجية الحالية. حيث كما ذكرنا في الفقرة السابقة بأن المؤسسة يرتبط بها عدد من المنظمات يبلغ عددها M. وإن كل واحدة منها تقوم بإنتاج ما مقداره N من أنواع المنتجات للمنظمة m (حيث أن: M ,....., 2 , 1 = m) حيث تم تهيئة Im بديل استثماري وذلك من أجل زيادة الطاقة الإنتاجية فيها.

إن الرقم المتوقع للطاقة الإنتاجية السنوية في المنظمة m وذلك بالنسبة لـ n من أنواع المنتجات (حيث أن: $n = 1 , 2 , ... , N$) وفي ظل البديل الاستثماري (حيث أن: $i = 1 , 2 , ... , Im$) يبلغ Aimn وحدة.

أما بالنسبة للرقم المتوقع للتكاليف الكلية السنوية لإنتاج وذلك لــ n من أنواع المنتجات في m وذلك عندما يبلغ الإنتاج السنوي Aimn فإنه يبلغ Kimn وحدة نقدية. وطبقاً لما هو متوقع لما يمكن أن يصل إليه رقم المبيعات بالنسبة للمنتجات المطروحة، فإن كل منظمة مرتبطة بالمؤسسة يفترض لها أن تقوم بإنتاج كميات إضافية في كل سنة من المنتجات تبلغ على الأقل Bn (حيث أن : $n = 1 , 2 , ... , N$) وحدة. وعندما يتم اتخاذ القرار باختيار بديل استثماري معين، فإنه ينبغي أن يتم ذلك على أساس تحقق الاستغلال الكامل للطاقة الإنتاجية الحالية والإضافية لكل منظمة. المطلوب هنا هو صياغة النموذج الرياضي لاتخاذ القرار الأمثل باختيار البديل الاستثماري الذي يحقق زيادة في الطاقة الإنتاجية للمنظمة، ويكون مؤشر الأمثلية في هذه الحالة هو مقدار التكاليف الكلية السنوية اللازمة لتحقيق الزيادة في الطاقة الإنتاجية حيث على أساس المؤشر المذكور يجري اختيار البديل الاستثماري الذي يضمن تحقق أقل تكاليف إنتاج كلية سنوية ممكنة.

الحل: نفرض أن Xim (حيث أن: $m = 1 , 2 , ... , M$, $i = 1 , 2 , ... , Im$)

هو درجة استغلال الطاقة الإنتاجية للمنظمة m في ظل البديل الاستثماري i.

عندما يتم اتخاذ القرار الأمثل بخصوص تحديد البديل الاستثماري، فإن من المفروض أن يتم ذلك مع تحقق الاستغلال الكامل لطاقة الإنتاج الإضافية ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$X_{im} = \begin{cases} 1 \longrightarrow (m) & \text{إذا تم اختيار البديل الاستثماري (i) للمنظمة} \\ 0 \longrightarrow (m) & \text{إذا لم يتم اختيار البديل الاستثماري (i) للمنظمة} \end{cases}$$

إن ظهور القيمة (1) للمتغير الأساسي Xim يعني أن الطاقة الإنتاجية الإضافية مستغلة بالكامل في المنظمة m وذلك في ظل البديل الاستثماري i.

لكل منظمة يتم اختيار بديل استثماري واحد، وينبغي أن يتم ذلك في ظل تحقيق الشرط التالي:

$$\sum_{i=1}^{Im} X_{im(n)} \leq 1 \qquad (m=1,2,....,M)$$

إن حجم الإنتاج السنوي في ظل أكبر زيادة ممكنة في الإنتاج الذي هو Aim(n) للمنظمة m ولأنواع المنتجات التي عددها n وفي ظل البديل الاستثماري أن يبلغ: $A_{imn}\, X_{im}$.

أما بالنسبة لحجم الإنتاج الإضافي لـ n من أنواع المنتجات في المنظمة m وفي ظل كافة البدائل الاستثمارية، فإنه يحسب من العلاقة التالية:

$$A_{1mn}\, X_{1mn} + A_{2mn}\, X_{2mn} + \ldots A_{1mn^{mn}}\, X_{1mn^{m}} = \sum_{i=1}^{Im} A_{imn}\, X_{im}$$

إن مجموع حجم الزيادة في الإنتاج لـ n من أنواع المنتجات في كافة المنظمات يحسب كما يلي:

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{Im} A_{imn}\, X_{im} \qquad (n=1,2,...,N)$$

أما حجم الزيادة في الإنتاج لـ n من أنواع المنتجات، يفترض به أن لا يقل عن الحجم الإنتاجي المحدد مسبقاً والـذي يبلـغ B_n، وينبغـي أن يـتم ذلـك في ظـل تحقيق الشرط التالي:

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{1m} A_{imn} X_{im} \geq B_n \qquad (n=1,2,...,N)$$

إن التكاليف السنوية الكلية المتحققة بسبب الزيادة في الإنتاج لـ n من أنـواع المنتجات في المنظمة m، في المستوى الذي عنده يتحقق استغلال الطاقة الإنتاجية الإضافية والمعبر عنه بالمتغير X_{im} يبلغ:

$$K_{imn} X_{im} \quad (i=1,2,...,\mathrm{Im}, m=1,2,...,M)$$

أما مجموع التكاليف الكلية لزيادة الإنتاج لـ n مـن أنـواع المنتجـات في كافـة المنظمات المرتبطة بالمؤسسة وفي ظل كافة البدائل الاستثمارية فإنه يحسب كما يلي:

$$K_n = \sum_{m=1}^{m} \sum_{i=1}^{1m} K_{imn} X_{im} \qquad (n=1,2,...,N)$$

إن مجموع التكاليف المترتبة على تحقق الزيادة في الإنتاج بالنسبة لكافـة أنـواع المنتجات التي تتعامل بها المؤسسة تبلغ:

$$K = \sum_{n=1}^{N} K_n = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{1m} K_{imn} X_{im}$$

ويمكن صياغة الرياضي أعلاه بشكل عام كما يلي:

أوجد قيمة المتغيرات الأساسية

$$X_{in} \qquad (i=1,2,...,\mathrm{Im}, m=1,2,...,M)$$

على أساس تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{1m} A_{imn} X_{im} \geq B_n \qquad (n=1,2,...,N)$$

$$\sum^{1m} X_{im} \leq 1 \qquad (m=1,2,...,M)$$

حيث أن:

$$X_{im} = \begin{cases} 1 \\ (i=1,2,...,\text{Im}, m=1,2,...,M) \\ 0 \end{cases}$$

ويجعل من قيمة دالة الهدف التالية أقل ما يمكن

$$K_n = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} \sum_{i=1}^{\text{Im}} K_{imn} X_{im}$$

5.1.2. نموذج توزيع المهام الإنتاجية لتخصص صناعي معين بين المدن

إن الكفاءة الإنتاجية لتخصص صناعي معين لا يعتمد على حجم ونوع الإنتاج المتحقق فحسب، بل يعتمد أيضاً على كيفية توزيعه جغرافياً بين المدن المختلفة في القطر ويكون أمام متخذ القرار الكثير من معايير الأمثلية بخصوص توزيع المهام الإنتاجية بين المحافظات. واحد هذه المعايير يمكن أن يكون مقدار الربح المتحقق من الإنتاج أكبر ما يمكن.

ولتوضيح فكرة صياغة النموذج الرياضي لهذا النوع من المشاكل، ونفرض على سبيل المثال أن هناك N من المحافظات تشترك في إنتاج ما مجموعه M من

أنواع المواد الأولية في كل مدينة. إن كمية هـذه المـواد محـدودة وليسـت مطلقـة بالنسبة للجهة المكلفة بإدارة العمليـة الإنتاجيـة أن الكميـة K مـن أنـواع المـواد الأولية (حيث أن $k = 1, 2, \ldots, K$) في المحافظة n ($n = 1, 2, \ldots, N$) تقـدر في فترة زمنية محددة b_{kn} وحدة. ويتم استهلاك كمية من أنواع المواد الأولية K في تكوين الوحدة الواحدة من أنواع المنتجات m (حيث أن : $m = 1, 2, \ldots, M$) في المدينة n وذلك بمقدار a_{kmn} وحدة. إن حجم الإنتاج بالنسبة لكـل نـوع مـن أنواع الإنتاج ينبغي أن لا يقل عـن القـيم $Q_1, Q_2, \ldots Q_m$ وحـدة، ذلـك مـع الأخذ بنظر الاعتبار مقدار الطلب. الربح الذي يتم الحصول عليه مـن الوحـدة الواحدة من أنواع المنتجات m في المدينـة n يبلـغ C_{mn} وحـدة نقديـة. المطلـوب تحديد الخطة المثلى لتوزيع المهام الإنتاجية، مع اعـتماد مجمـوع مقـدار الـربح مـن الإنتاج المتحقق في كافة المدن مؤشراً للأمثلية.

الحل: نفرض أن X_{mn} ($m = 1, 2, \ldots, M, n = 1, 2, \ldots, N$) هو حجم الإنتـاج من أنواع المنتجات m في المحافظة n عليه فإن المتغير الأسـاس X_{mn} لا يمكـن أن يساوي قيمة سالبة، أي أن:

$$X_{mn} \geq 0 \qquad (m=1,2,\ldots,M\,,\, n=1,2,\ldots,N)$$

استهلاك K نوع من أنواع المواد الأولية المستخدمة في تكوين X_{mn} وحدة مـن m من أنواع المنتجات في المحافظة n يبلغ $a_{kmn}\ X_{mn}$ وحدة. أما بالنسبة لمجمـوع استهلاك K نوع من المواد الأولية في المحافظة n ولكافـة أنـواع المنتجـات، فإنـه يحسب كما يلي:

$$a_{kin} X_{in} + a_{k2n} X_{2n} + ... a_{kmn} X_{mn} = \sum_{m=1}^{M} a_{kmn} X_{mn}$$

إن كمية المواد الأولية من النـوع k المتـوفرة في المحافظـة n في الفـترة الزمنيـة المحددة تبلغ كما ذكرناه أعلاه b_{kn} وبموجب ذلك أن المتغير الأسـاسي ينبغـي أن يحقق الشرط التالي:

$$\sum_{m=1}^{M} a_{kmn} X_{kmn} \leq b_{kn} \qquad (k=1,2,....K,\ n=1,2,...,N)$$

إن حجم الإنتاج بالنسبة لـ m من أنواع المنتجات في كافة المحافظات يبلغ:

$$X_{m1} + X_{m2} + ... + X_{mN} = \sum_{n=1}^{N} X_{mn} \ (m=1,2,...,M)$$

طبقاً للدراسات والتوقعات حول مقدار الطلب على المنتجات، فـإن مجمـوع حجم إنتاج لـ m من أنواع المنتجات ينبغي أن لا يقل عن الحجم Q_m.

(حيث أن: m = 1 , 2 , …., M) مع تحقق الشرط التالي:

$$\sum_{n=1}^{N} X_{nm} \geq Q_m \qquad (m=1,2,....,M)$$

إن الربح الذي يمكن الحصول عليه من إنتـاج X_{mn} وحـدة لــ m مـن أنـواع المنتجات في المحافظة n يبلغ C_{mn} X_{mn}. ويحسب الربح الكلي من كافة المنتجات المتحققة ولسكان المحافظة كما يلي:

$$Z = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} C_{mn} X_{mn}$$

ويمكن إعادة صياغة النموذج الرياضي أعلاه كما يلي:

المطلوب: تحديد قيمة المتغيرات الأساسية التالية:

$$X_{mn} \qquad (m=1,2,...,M\,, n=1,2,...,N)$$

وذلك في ظل تحقق الشروط:

$$\sum_{m=1}^{M} a_{kmn} X_{mn} \leq b_{kn} \qquad (k=1,2...,K\,,\ n=1,2,...,N)$$

$$\sum_{n=1}^{N} X_{mn} \geq Q_m \qquad (m=1,2,...,M)$$

حيث أن:

$$X_{mn} \geq 0$$

$$(m=1,2,...,M\,, n=1,2,3,\ ...,N)$$

وذلك بما يجعل من قيمة دالة الهدف التالية أعلى ما يمكن:

$$Z = \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} C_{mn} X_{mn}$$

6.1.2. نموذج استغلال وسائل النقل

إن النماذج الرياضية المستخدمة في مساعدة متخذ القرار في تحقيق الاستغلال الأمثل لوسائل النقل يمكن تقسيمها إلى ثلاثة مجموعات وهي:

1- النماذج الرياضية التي تخص النقل بشكل عام.

2- النماذج الرياضية التي تخص التوزيع الأمثل لوسائل النقل البحري على خطوط الملاحة.

3- النماذج الرياضية المتعلقة بحساب الحمولة المثلى لوسائل النقل البحري.

يستخدم النوع الأول من النماذج الرياضية في معالجة المشاكل المتعلقة بالتوزيع الأمثل للمواد والبضائع بين قطاعات اقتصادية مختلفة وبين مواقع جغرافية مختلفة ويشتمل أيضاً تحويل ونقل البضائع نصف الجاهزة من خط إنتاجي معين إلى خط إنتاجي آخر. أما بالنسبة للنوع الثاني فإنه يستخدم في معالجة مشاكل النقل المتعلقة بالاستغلال الأمثل لوسائل النقل البحري من خلال توزيعها بين الخطوط والمواقع الملاحية التي تنقل بموجبها المواد والبضائع، بالشكل الذي يؤدي إلى ما يعرف بالتوزيع الأمثل هذه الوسائل بين خطوط الملاحة.

أما النوع الثالث من النماذج الرياضية فهو يستخدم في معالجة مشاكل النقل المتعلقة بكيفية تحقيق الاستغلال الأمثل لوسائل النقل البحري أي حساب الحمولة المثلى للباخرة وبما يحقق الهدف المطلوب بأقل كلفة وأعلى عائد. وفيما يلي توضيح لفكرة بناء النماذج الرياضية الواردة من النوع الثاني والثالث. أما بالنسبة للنوع الأول فإنه سوف يرد ذكرها في فصول لاحقة.

1.6.1.2. النموذج الرياضي المستخدم في التوزيع الأمثل للبواخر على خطوط الملاحة:

شركة ملاحة تملك الأنواع N من البواخر بمواصفات مختلفة، اتخذت قراراً بتوزيع هذه البواخر على M من خطوط الملاحة. مجموع البواخر التي تملكها هذه الشركة يبلغ L_n (حيث أن $n = 1 , 2 , \ldots, M$).

المعدل السنوي لحجم البضاعة المنقولة للباخرة نوع n (حيث أن $n = 1 , 2 , \ldots, M$) على خط الملاحة m (حيث أن $m = 1, 2,\ldots, M$) يبلغ a_{mn}.

المعدل السنوي لتكاليف استغلال الباخرة نوع n على خط الملاحة m فإنه يبلغ b_{nm} وحدة نقدية. أما عدد وحدات البضاعة المنقولة على خط الملاحة m فإنه يبلغ A_m (حيث أن $m = 1 , 2 , \ldots, M$) وحدة من البضائع المختلفة سنوياً.

المطلوب: تحديد التوزيع الأمثل للبواخر العائدة للشركة على خطوط الملاحة المتوفرة. ويعتمد معيار للأمثلية في هذه الحالة مجموع تكاليف الاستغلال للبواخر في كافة خطوط الملاحة.

الحل: نفرض أن X_{mn} (حيث أن: $n = 1 , 2 , \ldots, N, m , = 1 , 2 , \ldots, M$)عدد البواخر نوع n العاملة على خط الملاحة m. علماً بأن قيمة هذا المتغير لا يمكن أن تكون قيمة سالبة وينبغي أن تكون أعداد صحيحة خالية من الكسور، أي أن:

$$X_{mn} = 0 , 1 , 2 , \ldots \ldots (m = 1 , 2 , \ldots, M , n = 1 , 2 , \ldots N)$$

إن المعدل السنوي لحجم البضاعة المنقولة للباخرة نوع n على خط الملاحة m يساوي المقدار التالي:

$A_{mn} X_{mn}$

وعليه فإن مجموعة كمية البضاعة المنقولة بواسطة كافة أنواع البواخر يحسب كما يلي:

$$a_{m1} X_{m1} + a_{m2} X_{m2} + ... + a_{mn} X_{mn} = \sum_{n=1}^{N} a_{mn} X_{mn} \; (m=1,2,...,M)$$

أما بالنسبة لعدد وحدات البضاعة المنقولة على خط الملاحة m بواسطة كافة أنواع البواخر ينبغي أن لا يكون ذلك أقل من القيمة A_m وذلك مع تحقق الشرط التالي:

$$\sum_{n=1}^{N} a_{mn} X_{mn} \geq A_m \qquad (m=1,2,...,M)$$

إن شركة الملاحة تملك عدد محدود من البواخر الصالحة للعمل في كافة الأنواع، وعليه ينبغي أن يؤخذ بنظر الاعتبار تحقق الشرط التالي:

$$X_{1n} + X_{2n} + ... + X_{nm} = \sum_{m=1}^{M} X_{mn} = L_n \; (n=1,2,...,N)$$

إن المعدل السنوي لتكاليف استغلال الباخرة نوع n على خط الملاحة m يبلغ المقدار التالي:

$b_{mn} Xmn$

أما بالنسبة لمجموع تكاليف استغلال الباخرة نوع n على كافة خطوط الملاحة خلال السنة فإنه يحسب كما يلي:

$$K_n = b_{1n} + X_{1n} + b_{2n} + X_{2n} + ... + b_{mn} X_{nm} = \sum_{m=1}^{m} b_{mn} X_{nm}$$

وحدة نقدية. ويحسب المعدل السنوي لتكاليف استغلال كافة أنواع البـواخر كما يلي:

$$K = \sum_{n=1}^{N} K_n = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} b_{mn} X_{mn}$$

وحد ة نقدية.

ويمكن إعادة صياغة النموذج الرياضي بشكل عام كما يلي:

أوجد قيم المتغيرات الأساسية التالية:

X_{mn} $\quad (m = 1 , 2 ,...., M , n = 1 , 2 , ... N)$

التي تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{n=1}^{N} a_{mn} X_{mn} \geq A_m \qquad (m=1,2,...,M)$$

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mn} = L_n \qquad (n=1,2,...,N)$$

حيث أن:

X_{mn}=0,1,2 , ...An-Integer $(m = 1 , 2 ,...., M , n = 1 , 2 , ... N)$

وبما يجعل من دالة الهدف التالية تصل إلى أعلى قيمة لها:

$$K = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} b_{mn} X_{mn}$$

2.6.1.2. النموذج الرياضي المستخدم في حساب الحمولة المثلى للباخرة:

إن الباخرة ذات طاقة التحمل الوزنية Q طن والحجم الاستيعابي p متر مكعب، ينبغي أن تستوعب N في أنواع البضائع. ويوجد في الميناء D_n (حيث أن: N , ... 2 , 1 = n) وحدة في البضائع. إن وقت تحيل البضائع أن لا يتجاوز T وحدة زمنية. مكونات النموذج الأخرى هي:

q_n طن ⟵ وزن وحدات البضاعة من النوع n .

p_n متر مكعب ⟵ حجم وحدات البضاعة من النوع n .

t_n وحدة زمنية ⟵ وقت تحميل وحدات البضاعة من النوع n .

C_n وحدة نقدية ⟵ الربح المتوقع الحصول عليه من تحميل الباخرة بوحدات البضاعة من النوع n.

المطلوب: حساب الحمولة المثلى للباخرة، مع اعتماد مجموع الربح المتوقع الحصول عليه من نقل البضاعة بواسطة البواخر كمؤشر للأمثلية.

الحل: نفرض أن X_n (حيث أن: N ,.... , 2 , 1 = n) عدد وحدات البضاعة من النوعn التي ينبغي أن تحمل على الباخرة. إن قيمة المتغير المذكور ينبغي أن تكون قيمة موجبة كما ينبغي أن لا تكون أكبر من قيمة البضاعة من النوع n الموجودة في الميناء. أي أن:

$$0 \le X_n \le D_n \qquad (n=1,2,...,N)$$

إن وزن X_n وحدة من البضاعة نـوع q_nX_n طـن. في حـين يحسـب وزن كافـة البضاعة المحملة على الباخرة كما يلي:

$$q_1 X_1 + q_2 X_2 + ... + q_N X_N = \sum_{n=1}^{N} q_n X_n$$

إن وزن كافة البضائع المحملة على الباخرة ينبغي أن لا يتجاوز طاقة التحميل الوزنية للباخرة Q أي أن:

$$\sum_{n=1}^{N} q_n X_n \leq Q$$

واستناداً إلى نفس المبدأ، فإن حجم كافة البضائع المحملة على البـاخرة ينبغـي أن لا يتجاوز الحجم الاستيعابي للباخرة P، أي أن:

$$\sum_{n=1}^{N} p_n X_n \leq p$$

وإن وقت تحميل كافة البضائع عـلى البـاخرة ينبغـي أن لا يتجـاوز T وحـدة زمنية.

$$\sum_{n=1}^{N} t_n X_n \leq T$$

ويحسب الربح المتحقق من عمليات نقل البضاعة كما يلي:

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_N X_N = \sum_{n=1}^{N} C_n X_n$$

وحدة نقدية

ويمكن إعادة صياغة النموذج الرياضي بشكل عام كما يلي:

المطلوب: حساب قيم المتغيرات الأساسية : $X_1 , X_2 , ..., X_N$

في ظل تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{n=1}^{N} q_n X_n \leq Q$$

$$\sum_{n=1}^{N} p_n X_n \leq p$$

$$\sum_{n=1}^{N} t_n X_n \leq T$$

حيث أن:

$$0 < X_n \leq D_n \qquad (n=1,2,...,N)$$

وبما يجعل من قيمة دالة الهدف التالية أعلى ما يمكن:

$$Z = \sum_{n=1}^{N} C_n X_n$$

7.1.2. نموذج توزيع المجمعات السكنية

إن توزيع المجمعات السكنية (عمارات، وحدات سكنية...الخ) تعتبر من المشاكل التي تشغل بال الكثير من المتخصصين في أمور السكن والبيئة وتقديم الخدمات. وفي هذه الفقرة نضع بين يدي متخذ القرار من المتخصصين في هذا المجال معالجة كمية لهذه المشاكل، حتي يتم ذلك على أساس بناء نموذج رياضي يستخدم في تحديد التوزيع الأمثل للمجمعات السكنية في إطار منطقة جغرافية معينة.

لو فرضنا أن M هـو عـدد المجمعـات السـكنية المطلـوب إقامتهـا في منطقـة جغرافية معينة، وعليه تبرز هنا مشكلة توزيع العمارات السكنية والخدمية ضمن المساحة المحدودة للمجمع السكني. إن فحوى المشكلة يقوم على أساس اختيـار من بين N من أنواع العمارات السكنية عدد معين منها يستوعب أكبر عدد ممكـن من الشقق السكنية ضمن المجمع السـكني m (حيـث أن: M ,.... , 2 , 1 = m) ولغرض صياغة النموذج الرياضي الذي يعـالج هـذه المشـكلة لا بـد مـن تـوفر المعلومات الفرضيات التالية:

- متوسط كلفة (t) متر مربع من الأرض والفضاء في منطقة المجمع السكني ينبغي أن لا يتجاوز K وحدة نقدية.
- ينبغي توفر في الفترة الزمنية (t) التي يتم خلالها اتخـاذ القـرار ببنـاء المجمـع السكني نماذج محددة للشقق السكنية وذلك من حيث الحجم وعدد الغرف والمساحة، وما إلى ذلك. ويرمز إلى نماذج الشقق السكنية بالمعلمات التالية:

$a_1^t , a_2^t , a_3^t , a_4^t , a_5^t , a_6^t$

حيث على سبيل المثال أن الرمز a_1^t يعني أن الشقة هي ما تعرف بـ M_3 التي تحـوي عـلى اثنـين مـن غـرف النـوم بالإضـافة إلى الصـالة والمرافـق الصـحية والحمام[1].

(1) في الواقع العملي أقصى ما يمكن أن تحوي الشقق السكنية هو 5 غرف وهو ما يعرف m6 ولهـذا السبب تم اعتماد الرقم (6) كرقم أخير في نموذج الشقق السكنية a_6^t .

- إن المساحة المخصصة لبناء العمارات السكنية والأبنية التي تقدم الخدمات للسكان في كل مجمع سكني في الفترة الزمنية t محددة وتبلغ متر مربع (أن: $m = 1, 2, \ldots, M$).

- في إطار الطاقة الاستيعابية للمساحة المحددة لإقامة المجمع السكني عليها، يكون أكبر عدد من العمارات السكنية من النوع n حيث (أن: $n = 1, 2, \ldots, N$) على مساحة المجمع السكني m (حيث أن: $m = 1, 2, \ldots, M$) في الفترة t مساوياً أو أقل من المقدار A_{mn}^{t} عمارة سكنية.

- في العمار السكنية من النوع n (حيث أن: $n = 1, 2, \ldots, N$) يمكن أن يسكن C_n شخص.

- في العمار السكنية من النوع n (حيث أن: $n = 1, 2, \ldots, N$) يوجد b_{in} شقة سكنية من النوع i (حيث أن: $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$).

- التكاليف الكلية للعمارة السكنية من النوع n في الفترة t تبلغ K_n^t. (حيث أن: $n = 1, 2, \ldots, N$) وحدة نقدية.

- المساحة المحسوبة بالمتر المربع، التي تشغلها العمارات السكنية من النوع n في إطار مساحة المجمع السكني m في الفترة t تبلغ.

$$P_{mn}^{t} = P_{mn}^{1} + P_{mn}^{2t} \quad (m=1,2,\ldots M, \;\; n=1,2,\ldots\ldots,N)$$

حيث أن:

P_n^1 ← المساحة المحسوبة بالمتر المربع المفروض حجزها لبناء العمارة من النوع n .

P_{mn}^{2t} ← المساحة المحسوبة بالمتر المربع المفروض حجزها لإقامة الأبنية الخدمية التي تؤمن الخدمة لسكان n من أنواع العمارات السكنية.

- الشقة من النوع i (حيث أن : $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6,$) تحتل مساحة d_i متر مربع.

إن القيم K , a_i^t , P_m^t , P_{mn}^t , A_{mn}^t , C_m , b_{in} , K_n^t , d_i تدخل كعوامل في المشكلة قيد الدرس، علماً بأن العوامل: K , C_n , b_{in} , d_i لا تتغير خلال الوقت.

بالنسبة للعوامل الداخلة في تركيب مجموعة نماذج الشقق السكنية المعبر عنها بالرمز (a_i^t) هي متغيرة خلال الوقت، وكذلك الشيء بالنسبة للعوامل الداخلة في تركيب تكاليف بناء العمارة السكنية من النوع n والمعبر عنها بالرمز K_i^t .

على أساس ما تقدم من المعلومات والفرضيات ينبغي بناء نموذج رياضي يستخدم في تحديد التوزيع الأمثل للمجمعات السكنية.

الحل: نفرض أن $\overset{t}{X}_{mn}$ $(m=1,2,....M,\ \ n=1,2,....., N)$ هو المتغير الأساسي الذي يمثل عدد العمارات السكنية من النوع n يتم بناءها في المجمع

السكني m في الفترة الزمنية t. إن قيمة المتغير الأساسي المذكور لا يمكن أن تكون سالبة وينبغي أن تكون أرقاماً كاملة، أي : $X_{mn} = 1 , 2 , ...,$.

إن أكبر عدد من العمارات السكنية من كافة الأنواع الممكن إقامتها على مساحة المجمع السكني m (حيث أن : $m = 1 , 2 , ..., M$) في الفترة t ينبغي أن لا يتجاوز الرقم A^t_{nm} وعليه فإن المتغيرات الأساسية في النموذج ينبغي أن تحقق الشروط التالية:

$$\begin{array}{ccc} X^t_{m1} & \le & A^t_{m1} \\ X^t_{m2} & \le & A^t_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X^t_{mN} & \le & A^t_{mN} \end{array}$$

إن المساحة المحسوبة لكل عمارة سكنية والأبنية الخدمية للمجمع السكني m محدودة وتبلغ P^t_m وعلى هذا الأساس فإن المتغيرات الأساسية ينبغي أن يتم اختيارها بما يحقق الشرط التالي:

$$\sum_{n=1}^{N} P^t_{mn} X^t_{mn} \le P^t_m \qquad (m = 1 , 2 ,....., M)$$

بهدف الأخذ بعين الاعتبار نماذج الشقق السكنية في صياغة النموذج الرياضي، يتطلب الأمر إدخال متغيرات مساعدة هي: y^t_m وتمثل هذه عدد العمارات السكنية في كافة الأنواع على مساحة المجمع السكني m في الفترة t. إن هذه المتغيرات تدخل في صياغة العلاقة الرياضية التالية:

$$y^t_m = \sum_{n=1}^{N} \sum_{t=1}^{6} b_{in} X^t_{mn}$$

بشكل عام تبلغ إعداد الشقق السكنية التي يتم بناءها في الفترة t على مساحة المجمع السكني m من أنواع النماذج المذكورة أعلاه، كما يلي:

شقة سكنية $M_1 \longrightarrow a_1^t\ y_m^t$

شقة سكنية $M_2 \longrightarrow a_2^t\ y_m^t$

شقة سكنية $M_3 \longrightarrow a_3^t\ y_m^t$

شقة سكنية $M_4 \longrightarrow a_4^t\ y_m^t$

شقة سكنية $M_5 \longrightarrow a_5^t\ y_m^t$

إن العوامل والمؤثرات الداخلة في تركيب نماذج الشقق السكنية a_i^t .

حيث أن : (i = , 2 , 3 , 4 , 5 , 61)

ينبغي أن يتم اختيارها بشكل بحيث يجعل من القيمة: $a_i^t\ \ y_m^t$ أرقاماً صحيحة وموجبة.

إن القيود المرتبطة بنماذج الشقق السكنية هي كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{N} b_{in}\, X_{mn}^{t} = a_1^t\, y_m^t$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_{2n}\, X_{mn}^{t} = a_2^t\, y_m^t$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_{6n}\, X_{mn}^{t} = a_6^t\, y_m^t$$

وبشكل عام يعبر عن هذه القيوم كما يلي:

$$\sum_{n=1}^{N} b_{in} X_{mn}^{t} = a_{i}^{t} y_{m}^{t} \qquad (i=1,2,....,6)$$

ويمكن أن تكتب هذه العلاقة كما يلي:

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} b_{in} X_{mn}^{t}}{y_{m}^{t}} = a_{i}^{t} \qquad (i=1,2,....,6)$$

من أجل الأخذ بنظر الاعتبار تكاليف بناء 1 متر مربع من العمارات السكنية، ينبغي إدخال متغير جديد مساعد وهو Z_{in}^{t} ويعبر عن مجموع عدد الأمتار المربعة التي يتم بناؤها في الفترة t في المجمع السكني m. إن المتغير المذكور يدخل في العلاقة الرياضية التالية:

$$Z_{m}^{t} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} d_{i} \; b_{in} \; X_{mn}^{t}$$

إن تكاليف بناء X_{mn}^{t} وحدة من العمارات السكنية من النوع n يبلغ $K_{n}^{t} \; X_{mn}^{t}$ وحدة نقدية. في حين تبلغ مجموع تكاليف بناء كافة العمارات السكنية في الفترة t على مساحة المجمع السكني m المقدار التالي:

$$\sum_{n=1}^{N} K_{n}^{t} \; X_{mn}^{t}$$

وحدة نقدية.

من المعلوم أن متوسط كلفة بناء المتر المربع الواحد للشـقق السـكنية يفـترض أن لا يتجاوز k وحدة نقدية، لذلك ينبغي أن يتحقق الشرط التالي:

$$\frac{\sum_{n=1}^{N} K_n^t X_{mn}^t}{Z_m^t} \leq K$$

ومنه يكون:

$$\sum_{n=1}^{N} K_n^t X_{mn}^t \leq K Z_m^t$$

في X_{mn}^t عمارة سكنية من النوع n يمكـن أن يسـكن $C_n \ X_{mn}^t$ شـخص، وعليه فإن على كامل المجمع السكني m في الفترة t يمكن أن يسـكن أشـخاص يبلغ عددهم.

$$W_m^t = \sum_{n=1}^{N} C_n X_{mn}^t$$

شخص

إن النموذج الرياضي أعلاه يمكن كتابته بشكل عام كما يلي:

المطلوب: إيجاد قيم المتغيرات الأساسية التالية:

$$y_{mn}^1 = 0, 1, 2, ... \quad (n = 1 \ , \ 2 \ ,..., N)$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$X_{m1}^{t} \leq A_{m1}^{t}$$
$$X_{m1}^{t} \leq A_{m2}^{t}$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$X_{mN}^{t} \leq A_{mN}^{t}$$
$$\sum_{n=1}^{N} p_{mn}^{t} X_{mn}^{t} \leq p_{m}^{t}$$

$$\sum_{n=1}^{N} b_{1n} X_{mn}^{t} = a_{1}^{t} y_{m}^{t}$$
$$\sum_{n=1}^{N} b_{2n} X_{mn}^{t} = a_{2}^{t} y_{m}^{t}$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots$$
$$\sum_{n=1}^{N} b_{6n} X_{mn}^{t} = a_{6}^{t} y_{m}^{t}$$

$$\sum_{n=1}^{N} K_{n}^{t} X_{mn}^{t} \leq K Z_{m}^{t}$$

ويجعل من قيمة دالة الهدف التالية أعلى ما يمكن:

$$W_{m}^{t} = \sum_{n=1}^{N} C_{n} X_{mn}^{t}$$

علماً بأن:

$$y_{m}^{t} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{6} b_{in} X_{mn}^{t}$$

$$Z_{m}^{t} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{6} d_{t} b_{tn} X_{mn}^{t}$$

8.1.2. نموذج اختيار بديل شراء أجهزة (إلكترونية)

من المعروف أن الحاسبات الإلكترونية تحتاج إلى ملحقات لتسجيل المعلومات وخزنها. وتختلف نوعية هذه الأجهزة من حيث المنشأة والطاقة الخزنية للمعلومات والكفاءة في خزن المعلومات واسترجاعها وما إلى ذلك. ويترتب على اختلاف النوعية تباين في كلف اقتنائها ولغرض توضيح فكرة بناء النموذج الرياضي نفرض أن منظمة أعمال معينة تمتلك نوعية معينة من الحاسبات الإلكترونية التي بإمكانها في الفترة الزمنية T معدل ما تستطيع توليده من وحدات المعلومات هو Q. وتستطيع المنظمة شراء N من أجهزة لخزن المعلومات ومعالجتها. حيث تبلغ تكاليف شراء الجهاز n (حيث أن: N1 ,.... , 2 ,) C_n وحدة نقدية وتبلغ تكاليف تشغيلها في الفترة T بما يساوي المقدار K_n.

في خلال الوحدة الزمنية الواحدة، بإمكان الجهاز n خزن كمعدل بما يساوي a_n معلومة. إن كفاءة خزن المعلومات وطبيعة المعالجة الأولية لها باستخدام الجهاز n تقاس من خلال احتمالية وقوع الخطأ الذي يساوي p_n. مع افتراض أن احتمالية وقوع الخطأ ينبغي أن لا يتجاوز المقدار P_o.

المطلوب: صياغة نموذج رياضي يساعد في اتخاذ القرار الأمثل المتعلق باختيار بديل شراء أجهزة لخزن المعلومات في الحاسبات الإلكترونية مع اعتماد تكاليف الشراء وتكاليف تشغيل الأجهزة في الفترة t كمؤشر للأمثلية.

الحل: نفرض أن X_n (حيث أن: $n = 1 , 2 , ..., N$) المتغيرات الأساسية التي على ساسها يتخذ القرار بشراء n من الأجهزة. حيث أن قيم هذه المتغيرات يمكن أن يكون صفر وواحد فقط وذلك كما يلي:

$$\begin{cases} X_n = 1 \longrightarrow & \text{إذا تقرر شراء n من الأجهزة} \\ X_n = 0 \longrightarrow & \text{إذا لم يتقرر شراء n من الأجهزة} \end{cases}$$

إن هذه الأجهزة تستطيع في الفترة t خزن معلومات يبلغ مقدارها $T_{an}\ X_n$ معلومة. وتبلغ مجموع المعلومات المخزونة باستخدام كافة أجهزة الخزن في الفترة T كما يلي:

$$T(a_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_N X_N) = T\sum_{n=1}^{N} a_n X_n \text{ معلومة}$$

متوسط مقدار المعلومات الخارجة من الحاسبة الإلكترونية في الفترة T يبلغ Q وينبغي تحقق الشرط التالي:

$$T\sum_{n=1}^{N} a_n X_n \geq Q$$

أو الشرط التالي:

$$\sum_{n=1}^{N} a_n X_n \geq \frac{Q}{T}$$

عند شراء أجهزة خزن المعلومات ينبغي أن يؤخذ بنظر الاعتبار، نوع معين في المواصفات أهمها كفاءتها في خزن المعلومات، وسهولة استرجاع المعلومات

بعد خزنها. وبشكل عام ينبغي أن تتحقق الشروط التالية عند اتخاذ القرار بشراء الأجهزة:

$$P_n \leq P_o \quad (n = 1, 2, ...N)$$

التكاليف الكلية التي تتحقق عند اتخاذ القرار بشراء كافة الأجهزة وهي:

$$K_Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + C_3 X_3 + ... + C_N X_N$$

$$K_Z = \sum_{n=1}^{N} C_n X_n$$

تكاليف تشغيل الأجهزة المتوقعة في الفترة T تحسب كما يلي:

$$K_e = K_1 X_1 + K_2 X_2 + K_3 X_3 + ... + K_N X_N$$

$$K_e = \sum_{n=1}^{N} K_n X_n$$

أما مجموع تكاليف الشراء مع تكاليف التشغيل للأجهزة، فهي تحسب كما يلي:

$$K = K_Z + K_e = \sum_{n=1}^{N} X_n C_n + \sum_{n=1}^{N} K_n C_n = \sum_{n=1}^{N} (C_n + K_n) X_n$$

النموذج الرياضي أعلاه يمكن إعادة كتابته بشكل عام كما يلي:

المطلوب: إيجاد قيم المتغيرات الأساسية في ظل تحقق الشروط

$$X_n = \begin{cases} 0 \\ 1 \quad (n = 1, 2, ..., N) \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{N} a_n X_n \geq \frac{Q}{T}$$

$$P_n \leq P_o \quad (n = 1, 2, ...N)$$

ويجعل من قيمة دالة الهدف التالية أقل ما يمكن:

$$K = \sum_{n=1}^{N} (C_n + K_n) X_n$$

إن صياغة النموذج الرياضي للمشكلة يضع أمام متخذ القرار مهمة معالجة النموذج المذكور بهدف حله وإيجاد النتائج النهائية للمشكلة. حيث هناك عدد من الطرق التي يمكن استخدامها في هذه الحالة وهي:

- الطريقة البيانية Graphical Method.
- الطريقة السمبلكس Simplex Method.

في الفقرات التالية سوق يتم توضيح فكرة استخدام هذه الطرق في حل نماذج البرمجة الخطية للتوصل إلى النتائج النهائية للمشكلة.

2.2. الطريقة البيانية Graphical Method في حل نماذج البرمجة الخطية

وهي من الطرق المبسطة التي لا تحتاج إلى خلفية علمية متقدمة في الرياضيات بل معلومات أساسية عن قواعد حل المعادلات الآنية ورسم الدوال. وتستخدم هذه الطريقة عندما يكون عدد متغيرات المشكلة لا يتجاوز الاثنين فقط. المشكلات التالية توضح فكرة استخدام هذه الطريقة.

مشكلة رقم (1): تنتج منظمة أعمال إنتاجية متخصصة في إنتاج المعدات المعدنية اثنين من أنواع المنتجات هي A , B ، يدخل في تكاليف هذه المنتجات الفولاذ، الخشب، الأصباغ، الطاقة الكهربائية والأيدي العاملة. وتمثل هذه

العناصر المستلزمات الأساسية للإنتاج والبيانات في الجدول أدناه توضح مقادير استهلاك هذه العناصر لغرض الحصول على الوحدة الواحدة من المنتوج A والمنتوج B.

جدول رقم (2-2) بيانات المشكلة

مستلزمات الإنتاج الأساسية	الكمية المتاحة	وحدة القياس	أنواع المنتجات	
			المنتج A	المنتج B
الفولاذ	8000	كغم	20	40
الخشب	6400	كغم	40	16
الأصباغ	6000	كغم	30	20
الأيدي العاملة	1400	عامل/ ساعة	10	2
الطاقة الكهربائية	12500	كيلو واط	50	25

الربح المتوقع من بيع وحدة واحدة من المنتج A وبلغ 9 وحدة نقدية، في حين بلغ 3 وحدة نقدية عند بيع الواحدة من المنتج B.

المطلوب:

أ- وضع خطة الإنتاج للمنظمة المذكورة يتضح من خلالها كمية ونوعية كل منتج ينبغي إنتاجه بحيث عند بيع هذه المنتجات يكون الربح (مؤشر الأمثلية) أعلى ما يمكن.

ب- بيان طبيعة استهلاك كل نوع من أنواع مستلزمات الإنتاج الأساسية.

الحل: بهدف حل هذه المشكلة يتطلب الأمر وضع الفرضيات التالية:

X_1 ← عدد الوحدات المطلوب إنتاجها من المنتج A.

X_2 ← عدد الوحدات المطلوب إنتاجها من المنتج B.

إن إنتاج المقادير (X_2 , X_1) من المنتج A و B يتطلب استهلاك المستلزمات الأساسية التالية وذلك كما يلي:

استهلاك الفولاذ ← $20X_1 + 40X_2$

استهلاك الخشب ← $40X_1 + 16X_2$

استهلاك الأصباغ ← $30X_1 + 20X_2$

استهلاك ساعات تشغيل الأيدي العاملة ← $10X_1 + 2X_2$

اسستهلاك الطاقة الكهربائية ← $50X_1 + 25X_2$

إن استهلاك عناصر المستلزمات الأساسية من الإنتاج في تكوين المنتجات ليس مطلقاً بل هو مرتبط بما هو متوفر في المنظمة قيد الدرس من هذه العناصر، لذلك عند وضع خطة الإنتاج ينبغي أن يؤخذ بعين الاعتبار تحقق الشروط التالية:

(1) $20X_1 + 40X_2 \leq 8000$

(2) $40X_1 + 16X_2 \leq 6400$

(3) $30X_1 + 20X_2 \leq 6000$

(4) $10X_1 + 2X_2 \leq 1400$

(5) $50X_1 + 25X_2 \leq 12500$

(6) $X_1, \quad X_2 \geq 0$

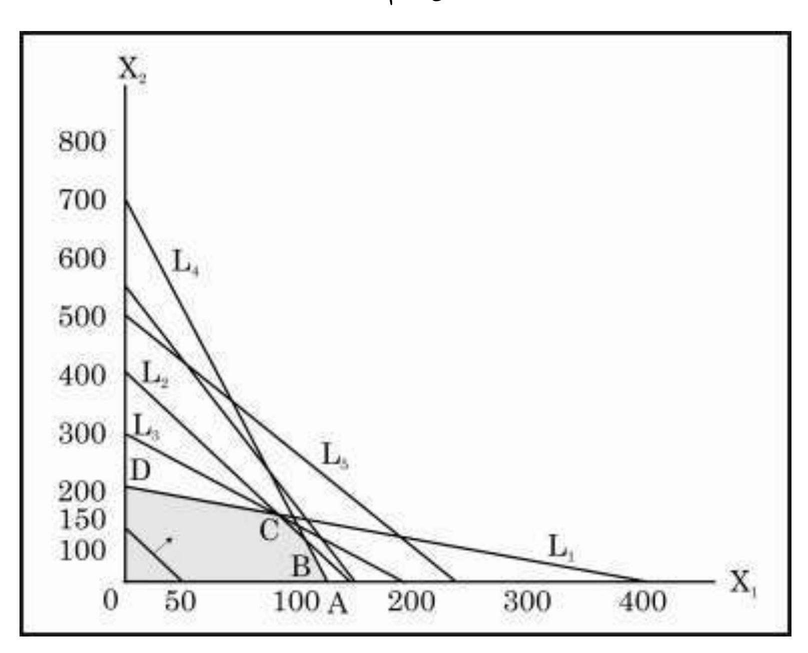
إن الربح المتوقع يحسب من خلال العلاقة الهادفة التالية:

$Z = 9X_1 + 3X_2$

إن خطة الإنتاج المثلى هي تلك الخطة التي في ظلها تتحقق الشروط الواردة أعلاه وتكون قيمة دالة الهدف (الربح المتوقع) عندها أعلى ما يمكن.

لغرض حل هذه المشكلة ينبغي في البداية رسم العلاقات الرياضية التي تمثل القيود ودالة الهدف وذلك كما يلي:

الشكل رقم (2.1)



إن كل علاقة رياضية تم تمثيلها بمستقيم، وحددت الرموز: L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 لنعبر عن كل واحد من هذه المستقيمات وذلك كما يلي:

$L_1 \quad : 20X_1 + 40X_2 = 5000$

$L_2 \quad : 40X_1 + 16X_2 = 6400$

$L_3 \quad : 30X_1 + 20X_2 = 6000$

$L_4 \quad : 10X_1 + 2X_2 = 1400$

$L_5 \quad : 50X_1 + 25X_2 = 12500$

إن المساحة المتمثلة بالشكل خماسي الأضلاع OABCD والتي تحددت أسفل المستقيمات التي تمثل القيود، تمثل منطقة الحلول الممكنة. وإن النقاط التي تمثل رؤوس الزوايا في الشكل الخماسي تمثل الحل الأفضل. حيث من بين هذه النقاط يتطلب الأمر تحديد نقطة الحل الأمثل. ومن المفروض أن هذه النقطة تقع في الزاوية البعيدة عن نقطة الأصل (نقطة تقاطع المحور السيني مع المحور الصادي)[1]. ولغرض تحديدها ينبغي رسم مستقيم يعبر عن معادلة دالة الهدف Z وهو المستقيم L.

ولغرض رسم هذا المستقيم ينبغي تحديد قيمة لأحد المجاهيل الثلاثة (Z_1 , X_2 , X_3) الداخلة في تركيب معادلة المستقيم المذكور وليكن ذلك Z. حيث نفرض أن:

وعليه يكون لدينا[2] $Z = 450$

$L : 9 X_1 + 3 X_2 = 450$

بعد أن يتم رسم مستقيم معادلة دالة الهدف ترسم مستقيمات موازية له بالاتجاه البعيد عن نقطة الأصل لحين بلوغ آخر نقطة من منطقة الحلول الممكنة تبقى مشتركة مع المستقيم المذكور بنقطة تماس، والتي تعتبر في هذه الحالة نقطة

---

(1) إذا كانت قيمة دالة الهدف تصل إلى أقل ما يمكن فإن نقطة الحل الأمثل تقع في مكان هو أقرب ما يكون إلى نقطة الأصل.

(2) ينبغي تحديد قيمة Z بالقدر الذي يؤدي إلى أن مستقيم دالة الهدف برسم دالة منطقة الحلول الممكنة.

الحل الأمثل. ومن الشكل البياني للمشكلة يتضح أن النقطة B هي نقطة الحل الأمثل. وقد ظهرت هذه النقطة من تقاطع المستقيمات L_4 , L_2 ولغرض إيجاد قيم إحداثيات هذه النقطة (وهي قيمة X_1 , X_2) ينبغي حل معادلات المستقيمات L_4 L_2 بالطريقة الآتية وذلك كما يلي:

$$L_2 \quad : 40\, X_1 + 16X_2 \;= 6400$$
$$L_4 \quad : 10\, X_1 + 2X_2 \;= 1400$$

ومنه نحصل على القيم: $X_2 = 100\ , \quad X_1 = 120$

واستناداً إلى ما تقدم نستنتج ما يلي:

أ- خطة الإنتاج المثلى تقوم على إنتاج 120 وحدة من المنتج A و 100 وحدة من المنتج B، حيث في ظل هذه الخطة كان الربح أعلى ما يمكن أي:

وحدة نقدية $Z = 9\, X_1 + 3X_2 = 9\ .\ 120 + 3.\ 100 = 1380$

ب- إن استهلاك كل نوع من أنواع مستلزمات الإنتاج الأساسية هي كالآتي:

الفولاذ ← كغم $X_1 + 40\, X_2 = 20\ .\ 120 + 40\ .\ 100 = 640020$

الخشب ← كغم $X_1 + 16\, X_2 = 40\ .\ 120 + 16\ .\ 100 = 640040$

الأصباغ ← كغم $X_1 + 20\, X_2 = 30\ .\ 120 + 20\ .\ 100 = 560030$

ساعات تشغيل الأيدي العاملة ← عامل10 $X_1+2X_2=10.\ \ 120+2.\ \ 100=1400$

الطاقة الكهربائية ← كيلو واط50 $X_1 + 25\, X_2=50.\ 120+25\ .\ 100 = 8500$

وعليه فإن نسبة استهلاك المتوفر من مستلزمات الإنتاج الأساسية هو:

الفولاذ $\frac{6400}{8000}.100=80\%$

الخشب $\frac{6400}{6400}.100=100\%$

الأصباغ $\frac{5600}{6000}.100=93.3\%$

ساعات تشغيل الأيدي العامل $\frac{1400}{1400}.100=100\%$

الطاقة الكهربائية $\frac{8500}{12500}.100=68\%$

مشكلة رقم (2): منظمة أعمال إنتاجية متخصصة بإنتاج نوعين من المنتجات (B , A) وكانت البيانات المتعلقة بالإنتاج موضحة بالجدول التالي:

جدول رقم (2-3) بيانات المشكلة

التفاصيل	وحدة القياس	المنتجات	
		A	B
الطب على الإنتاج	وحدة منتجة	1000	2000
ساعات العمل اللازمة	عامل/ ساعة ــــــ وحدة منتجة	3	6
استهلاك المواد الأولية	كغم/ وحدة منتجة	6	18
الربح المتوقع	دينار/ وحدة نتيجة	12	18

تستطيع المنظمة توفير ما مقداره 24000 عامل/ ساعة يومياً، كما أنها تملك في مخازنها كميات محدودة من المواد الأولية، لذلك لا يمكن أن يتجاوز الاستهلاك اليومي لها 45 طن.

المطلوب: وضع خطة مثلى للإنتاج، بحيث بموجبها يتم إشباع حاجة الطلب على البضاعة المنتجة وبما يجعل من الربح (مؤشر الأمثلية) أعلى ما يمكن.

الحل:

نفرض أن: X_1 هو مقدار الإنتاج اليومي المطلوب من A.

X_2 هو مقدار الإنتاج اليومي المطلوب من B.

من الجدول (3.2) نستنتج بأن متطلبات إشباع الحاجة إلى البضاعة المنتجة تتضح من خلال تحقق الشروط التالية:

$$X_1 \geq 1000$$
$$X_2 \geq 2000$$

إن مجموع الحاجة إلى ساعات العمل يحسب كما يلي:

$$3 X_1 + 6 X_2 \leq 24000$$

وبنفس الطريقة ينبغي أن يكون استهلاك المواد الأولية يومياً أقل من 4500، أي أن:

$$18 X_1 + 6X_2 \leq 45000$$

إن قيم المتغيرات X_1 , X_2 ينبغي أن لا تكون سالبة أي أن:

$$X1 \geq 0 \qquad X2 \geq 0$$

ويمكن كتابة النموذج الرياضي للمشكلة بالكامل كما يلي:

الشروط الأساسية

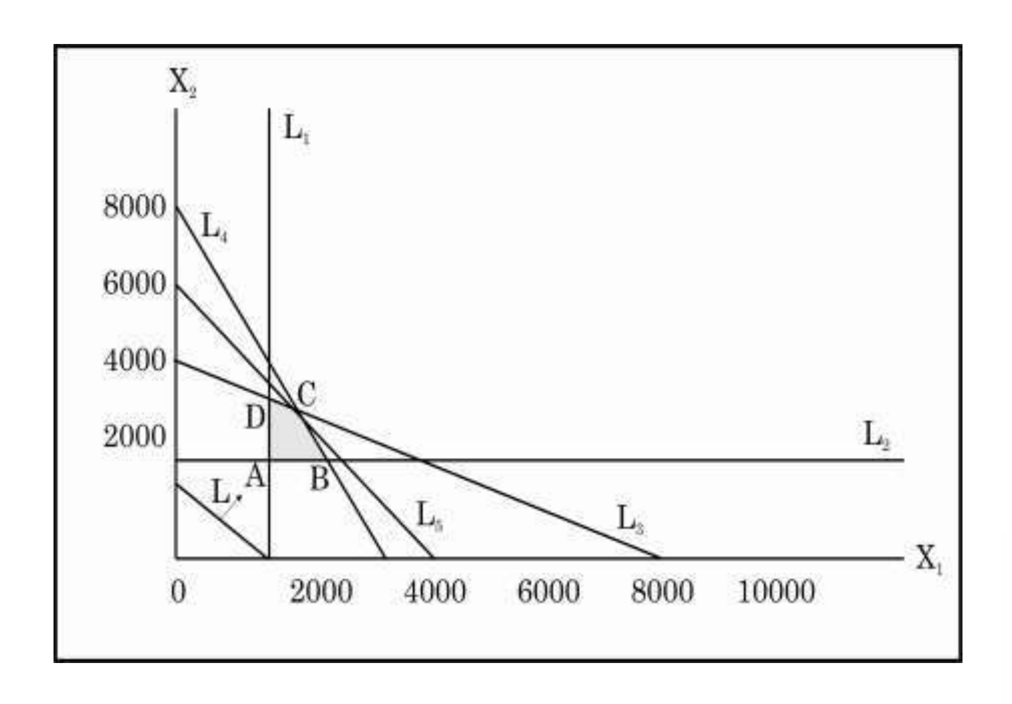
$$X_1 \geq 1000 \qquad (1)$$
$$X_2 \geq 2000 \qquad (2)$$
$$3X_1 + 6X_2 \leq 2400 \qquad (3)$$
$$18X_1 + 6X_2 \leq 4500 \qquad (4)$$
$$X_1 \geq 0 \; , \; X_2 \geq 0 \qquad (5)$$

دالة الهدف $Z = 18X_1 + 12X_2 \longrightarrow Max$

أي أن حل هذا النموذج يؤدي إلى تعظيم قيمة دالة الهدف (Z)، على افتراض أن قيم المتغيرات الأساسية (X_1 , X_2) تحقق الشروط (1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5).

ويجري حـل هـذه المشـكلة باسـتخدام الطريقـة البيانيـة ويـتم ذلـك برسـم العلاقات الرياضية التي تمثل قيود المشكلة كما هو واضح بالشكل البياني التالي:

الشكل رقم (2-2) الحل بطريقة البيانية وتحديد منطقة الحلول



إن الرموز L_1 , L_2 , L_3 , L_4 تعبر عن قيود المشكلة، وذلك كما يلي:

$$L_1 : X_1 + X_2 = 1000$$
$$L_2 : X_2 + 2X_2 = 2000$$
$$L_3 : 3X_1 + 6X_2 = 24000$$
$$L_4 : 18 X_1 + 6X_2 = 45000$$

إن الشكل الرباعي DCBA يمثل منطقة الحلول الممكنة، وتحدد هذه المنطقة بواسطة المستقيمات L_1 , L_2 , L_3 , L_4. وكما في المثال السابق، فإن المطلوب هنا البحث عن نقطة الحل الأمثل في زوايا الشكل الرباعي المذكور التي تمثل نقاط الحل الأفضل. ويتطلب ذلك رسم مستقيم دالة الهدف، أي أن:

$$L : Z = 18 X_1 + 12 X_2$$

نفرض أن قيمة $Z = 18000$

أي أن:

$$L : 18 X_1 + 12 X_2 = 18000$$

وبعد رسم مستقيم دالة الهدف، يتم رسم مستقيمات موازية بالاتجاه البعيد نقطة الأصل. إن النقطة C هي آخر نقطة من الشكل الرباعي ABCD تمس مستقيم معادلة دالة الهدف، وعليه تعتبر نقطة الحل الأمثل. إن هذه النقطة تتحدد من خلال تقاطع المستقيمات L3 , L4. وعليه فإن حساب قيمة إحداثيات هذه النقطة (X_2 , X_1) تكون من خلال تقاطع المستقيمات:

$$L_3 : 3 X_1 + 6 X_2 = 24000$$
$$L_4 : 18 X_1 + 6X_2 = 45000$$

وعند حل هذه المعادلات آنياً، يتم الحصول على ما يلي:

$$X_1 = 1400 , \ X_2 = 1237.9$$

أي أن الخطة المثلى للإنتاج هو إنتاج (1400) وحدة من المنتج A و (1237.9) وحدة من المنتج B وأن الربح المتوقع يبلغ في هذه الحالة كما يلي:

$$Z = 18X_1 + 12X_2 \longrightarrow 18.1400 + 12.1237,9 \approx 40055$$ دينار

3.2. طريقة السمبلكس Simplex Method في حل نماذج البرمجة الخطية

أول من قدم هذه الطريقة هو عالم الرياضيات G. Dantzing في سنة 1947، باعتبارها من الطرق الرياضية الكفوءة في معالجة المشكلات التي تتكون من اثنين أو أكثر من المتغيرات[1].

إن فكرة هذه الطريقة قائمة على أساس إيجاد الحل المطلوب للمشكلة المدروسة (التي يتم التعبير عنها من خلال النموذج الرياضي) في مراحل متسلسلة في إطار جدول السمبلكس الذي يتم تصميمه بما يتلائم ومتطلبات مراحل الحل وإيجاد قيم المتغيرات المجهولة.

يتم في المرحلة الأولى إيجاد الحل الابتدائي الأساسي الممكن، وفي المرحلة اللاحقة يتم تحسين هذا الحل تمهيداً نحو إيجاد الحل الأفضل الذي قد تكون عملية الحصول عليه تمتد لأكثر من مرحلة واحدة. في المرحلة الأخيرة يتم الحصول على الحل الأمثل والنهائي للمشكلة.

---

(1) يصل عدد المتغيرات التي يمكن أن تعالجها هذه الطريقة إلى 500 متغير وعدد القيود يصل إلى 500 (أي مصفوفة حدودها: $mXn = 500 \times 500$) وذلك طبقاً إلى آخر نسخة إصدار لبرنامج Q M أو Win Q, S. B وهي برامجيات جاهزة مخصصة لهذا الغرض.

إن هذه المراحل من عمليات الحل تتم في إطار جدول السمبلكس Simplex كما هو واضح في جدول (2–4) وكذلك كما في الصيغة الأخرى الموضحة في الجدول رقم (2–5) حيث يمكن أن يكون الحقل الخاص بمعاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف C_B إلى الجانب الأيسر من الجدول وذلك كإجراء شكلي لا غير.

1.3.2. أنواع طرق الحل وفق الطريقة المبسطة (السمبلكس):

إن الحل وفق الطريقة المبسطة على أساس الجداول الوارد ذكرها أعلاه يمكن إجمالها كما في الشكل رقم (2–3).

1– استخدام الأسلوب اليدوي حيث يتم اللجوء إلى هذا الأسلوب لمعالجة المشاكل الأقل تعقيداً، وكذلك من أجل إيصال فكرة وتكنيك الطريقة بشكل مفصل للقارئ. وضمن هذه الطريقة يرد نوعين من الطرق وهي كما يلي:

أ– الطريقة الاعتيادية Normal Simplex.

ب– الطريقة المعدلة Revised Simplex.

وسواء كانت الطريقة الاعتيادية أو المعدلة فإنه طبقاً للأسلوب اليدوي يمكن اعتماد الطرق التالية:

أ– الطريقة الحسابية التقليدية

ب– طريقة المصفوفات.

جدول رقم (2-4) الصيغة العامة لجدول الطريقة المبسطة (السمبلكس) Simplex Table

	CB	المتغيرات Xj Variables Si	X_1	X_2	X_3	...	X_n	S_1	S_2	...	S_m	القيم الحرة bi ودالة الهدف Z
		معامل المتغيرات في دالة الهدف Cj										
الحل الممكن		المتغيرات الأساسية Basic Variables										
		Zj										دالة الهدف ← Z
		(Zj - Zj)										
الحل الأفضل		المتغيرات الأساسية Basic Variables										
		Zj										دالة الهدف ← Z
		(Zj - Zj)										
الحل الأمثل		المتغيرات الأساسية Basic Variables										
		Zj										دالة الهدف ← Z
		(Zj - Zj)										

2- استخدام البرامجيات والحاسوب، حيث أن هذه الطريق أكثر تطوراً وتستخدم عادة لمعالجة المشاكل الكبيرة (عدد متغيراتها كبير جداً) والمعقدة، ومن أهم البرامج المستخدمة في هذا المجال هي:

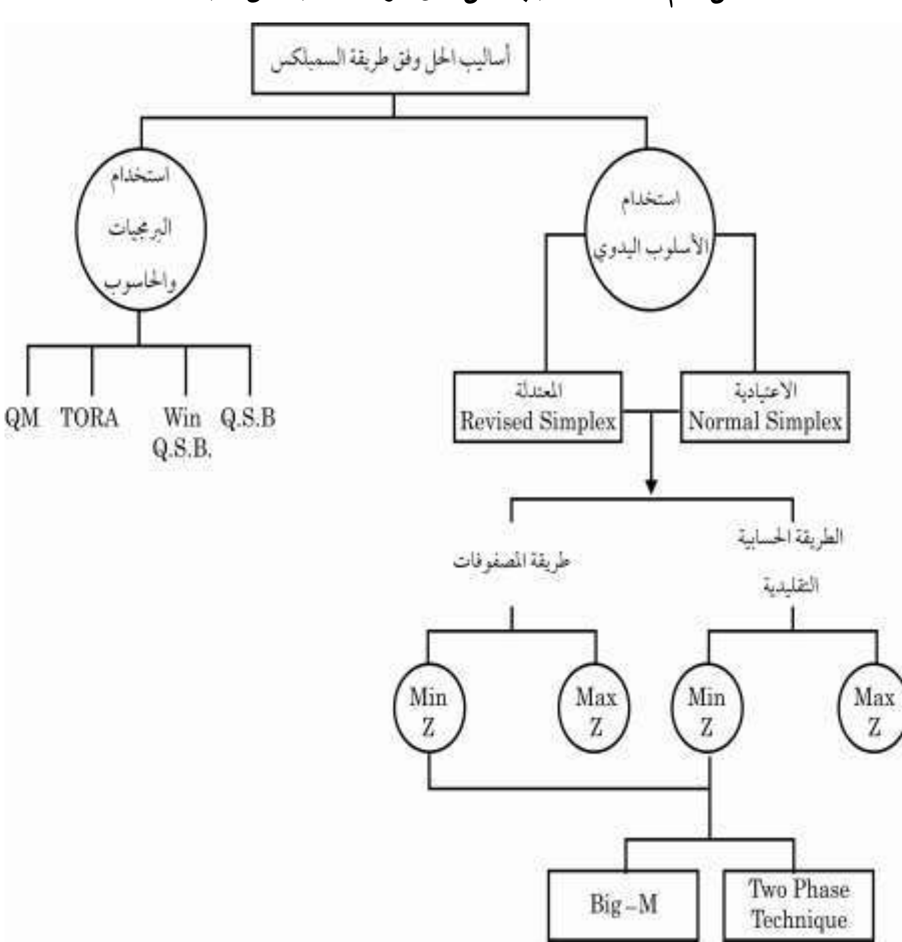
O.S.B+, Win Q.S.B, TORA, QM,...

جدول رقم (2-5)

نموذج آخر للصيغة العامة لجدول الطريقة المبسطة (السمبلكس) Simplex Table

CB	المتغيرات Xj Variables Si	X_1	X_2	X_3	...	X_n	S_1	S_2	...	S_m	القيم الحرة bi ودالة الهدف Z
	C_j معامل المتغيرات في دالة الهدف										
	المتغيرات الأساسية Basic Variables										
	Z_j										دالة الهدف ← Z
	(Zj - Zj)										
	المتغيرات الأساسية Basic Variables										
	Z_j										دالة الهدف ← Z
	(Zj - Zj)										
	المتغيرات الأساسية Basic Variables										
	Z_j										دالة الهدف ← Z
	(Zj - Zj)										

شكل رقم (2-3) أساليب الحل وفق طريقة السمبلكس (المبسطة)



3.4.2. استخدام الأسلوب اليدوي (الطريقة الاعتيادية أو المعدلة)

الطريقة الحسابية التقليدية:

في البداية ينبغي التمييز بين خطوات الحل بموجب هذه الطريقة عندما تكون دالة الهدف تصل إلى أعلى ما يمكن (.Max) وأن القيود مكتوبة في حالة (أقل أو يساوي $\leq$) والتي تختلف بعض الشيء عن الحالة عندما تكون المشكلة

لها دالـة هـدف تصـل إلى أقـل مـا يمكـن (Min) وأن القيـود مكتوبـة في حالـة (أكبر أو يساوي $\geq$) أو خليط من العلاقات ($\leq$ ، = ، $\geq$)، أي ينبغي التمييز بين الحالات المذكورة أعلاه قبل البدء بعملـة الحـل، وإذا افترضـنا أن المشـكلة هـي تعظيم دالة الهدف (Max. Z., F.)، فإن في هذه الحالة ينبغي ملاحظة ما يلي: [1]

1- التأكد من أن هذا الحل هو الأمثل أم لا.

2- إذا لم يكن الحل الذي تم الحصول عليهـا هـو الأمثـل، يـتم الانتقـال إلى المرحلة التالية بعد أن يجري تحسين الحل السابق من أجـل الحصـول عـلى الحل الأمثل.

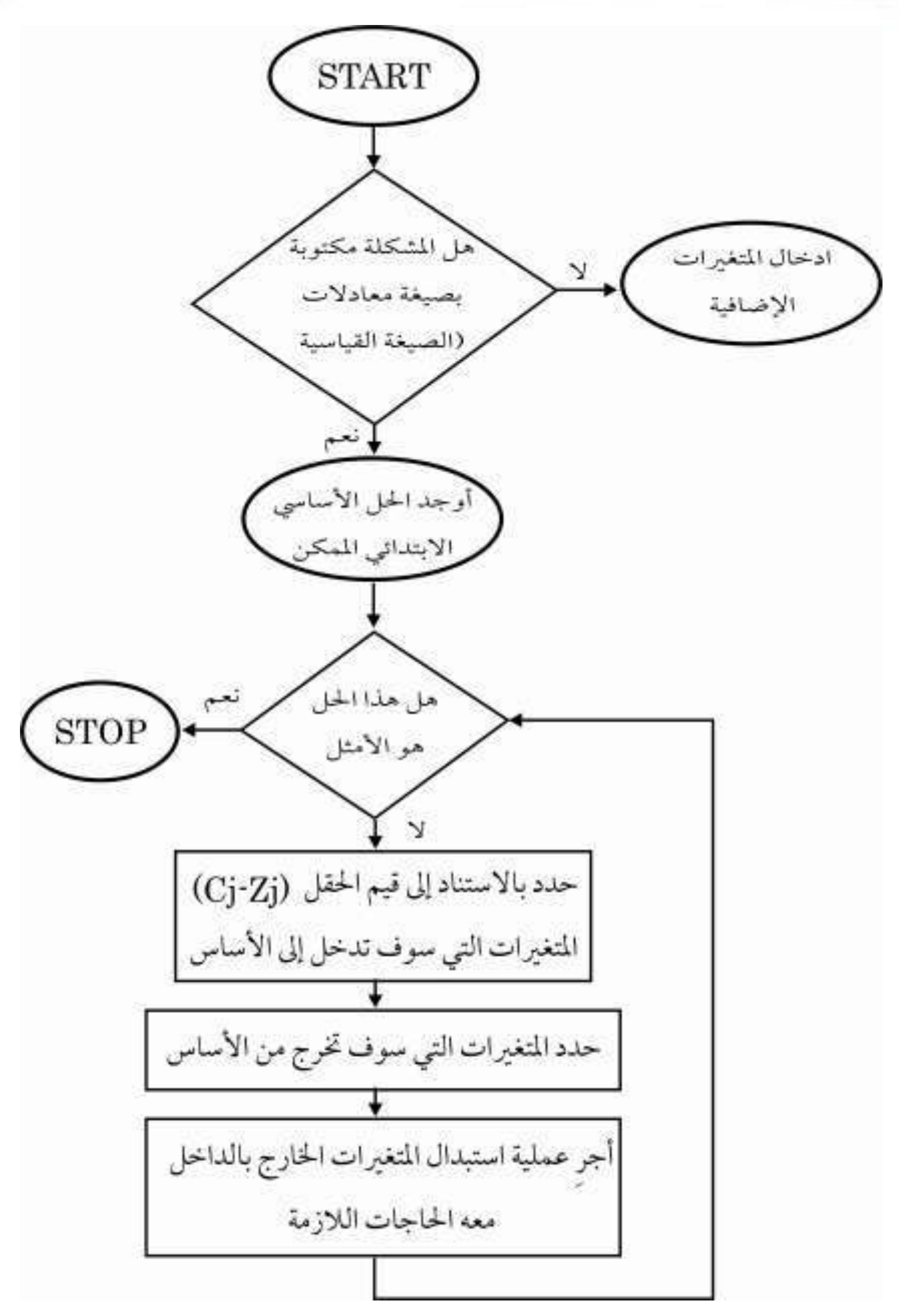
إن فكرة هذه الطريقة تتضح من خلال المخطط الانسـيابي الموضـح بالشـكل التالي الذي بموجبه تتم عملية الحل ضمن جدول السمبلكس:

أولاً: الحل بطريقة السمبلكس في حالة تعظيم دالة الهدف بوجـود العلامـة أقل ويساوي($\leq$):

بعد أن يتم تحويل صيغة النموذج الرياضي من الصيغة القانونيـة إلى الصـيغة القياسية مـن خـلال إضـافة المتغـيرات الراكـدة ($S_1, S_2, \ldots. Sm$) يـتم اعـتماد الخطوات التالية:

---

(1) للتعرف على بقية الطرق (استخدام البراجيات والحاسوب، طريقة المصفوفات) ننصح القـارئ الكريم بمراجعة مؤلفنـا الموسـوم: " الأسـاليب الكميـة – نـماذج خطيـة في تخطـيط الإنتـاج"، مجدلاوي للنشر والتوزيع، عمان، 2004، ص112.



نقل البيانات المتوفرة في النموذج الرياضي إلى المرحلة الأولى من جدول السمبلكس، حيث يتم وضع المتغيرات الراكدة في الحقل الخاص بالمتغيرات الأساسية Basic Variables ولكونها تأخذ هذه الصفة في هذه المرحلة من عملية

الحل، ويتم وضع تحت كل متغير $(X_1, X_2, ... Xn)$ المعاملات للمتغيرات في القيود. أي أمام المتغير S_1 توضع المعاملات للمتغيرات في العلاقة الرياضية الأولى، وأمام S_2 توضع المعاملات للمتغيرات في العلاقة الرياضية الثانية وهكذا. في العمود bi توضع القيم الحرة، وهي القيم الموجودة في الطرف الأيمن من كل علاقة رياضية. أما العمود الأخير C_B فإنه توضع فيه معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف. في الحقل C_j توضع معاملات دالة الهدف.

وفي بقية الحقول تتم عمليات حسابية على النحو التالي:

1- تحسب القيم (Zj)، (Cj – Zj)، (Z) كما يلي:

- القيمة (Zj) تحسب من العلاقة التالية:

$$Zj = C_B * aij$$
$$i = 1, 2, ..., m$$
$$j = 1, 2, ...,n$$

حيث أن:

CB = معامل المتغيرات الأساسي في دالة الهدف.

aij = عمود القيم التي تمثل معاملات المتغيرات الأساسية وغير الأساسية.

ويمكن كتابة هذه العلاقة الرياضية كما يلي:

$$Zj = \sum_{i=1}^{m} C_B \, aij$$
$$j = 1, 2, ..., n$$

وأن بعد كل عملية ضرب لقيم العمود C_B يتم جمع حصيلة الضرب ضمن العمود (j) ذاته.

- القيمة (Cj – Zj) تحسب هذه القيمة من حاصل طرح القيم التي تم إيجادها في أعلاه من معاملات المتغيرات في دالة الهدف Cj.

- القيمة (Z) تحسب كما يلي:

$$Z = C_B * bi$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

2- في المرحلة التالية يتم تحسين الحل الأولي الابتدائي وذلك من خلال تغيير تشكيلة المتغيرات الأساسية حيث يتم إدخال متغير جديد وإخراج متغير حالي. ويتم إدخال ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة موجبة في الحل (Cj – Zj)، ويسمى العمود الذي يوجد فيه هكذا متغير بالعمود المحوري Pivotal Colum، ويتم تحديد المتغير الخارج بعد أن يتم تقسيم القيم في الحقل bi على ما يقابلها من قيم في العمود المحوري، وأن المتغير الأساسي الذي يقابل أقل قيمة يعتبر هو المتغير الخارج Pivotal Row.

إن العنصر الواقع في نقطة تقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري يسمى بالعنصر المحوري Pivotal Element، ولهذا العنصر أهمية في الحسابات اللاحقة.

3- تحسب القيم في المرحلة التي تلي المرحلة الأولى من جدول السمبلكس وفق عمليات حسابية معينة. حيث تعتمد العمليات الحسابية في المرحلة الثانية على ما يقابلها من قيم في المرحلة الأولى، أي بعبارة أخرى لحساب القيم

للمتغيرات في المرحلة الثانية، فإن ذلك يعتمد على ما يقابلها من قيم في المرحلة الأولى، ولحساب قيم المتغيرات في المرحلة الثالثة، فإن ذلك يعتمد على قيم المتغيرات في المرحلة الثانية وهكذا.

4- في المراحل التالية للمرحلة الأولى من جدول السمبلكس تعطى الأولوية في عمليات حساب قيم المتغيرات، لقيم المتغير الداخل Entering Variable، حيث تحسب قيم هذا المتغير بقسمة ما يقابلها من قيم في المرحلة السابقة على العنصر المحوري.

5- قيم المتغيرات الأخرى (غير المتغير الداخل) تحسب وفق العلاقة الرياضية التالية:

$$Nj = K - \frac{M * y}{aij}$$

حيث أن:

Nj ⇐ القيمة الجديدة المطلوب وضعها في الحقل (j) (j = 1, 2, ..,n).

K ⇐ القيمة الحالية

M ⇐ القيمة المقابلة للقيمة الحالية في الصف المحوري.

Y ⇐ القيمة المقابلة للقيمة الحالية في العمود المحوري.

aij ⇐ العنصر المحوري.

مثال رقم (1): إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية المتخصصة بإنتاج المواد الغذائية، ترغب في وضع خطة إنتاج للسنة القادمة، وقد عرضت على إدارة المنظمة خمسة بدائل من المنتجات، بحيث أن كل منتج يحتاج إلى مقادير مغايرة من مستلزمات الإنتاج. وأن هامش الربح لكل منتج يختلف عن الآخر كما هو واضح في الجدول التالي:

مقدار المتوفر من مستلزمات الإنتاج	المنتج No.5	المنتج No.4	المنتج No.3	المنتج No.2	المنتج No.1	المنتجات / مستلزمات الإنتاج
150 كغم	0	2.5	1.5	1	4	المواد الأولية (كغم)
180 واط	7	2	1	3	2	الطاقة الكهربائية (واط)
120 ساعة	2	0	2	2	0	ساعة العمل (ساعة)
	1	2	4	1	2	هامش الربح المتوقع

المطلوب: ترغب إدارة المنظمة وضع خطة إنتاج مثلى يتم بموجبها تحقيق حالة الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج المتوفرة، وتحديد كمية ونوعية الإنتاج المطلوب اعتمادها ضمن الخطة بحيث تكون الأرباح الكلية المتوقعة عند بيع المنتجات المعتمدة في الخطة المقترحة أعلى ما يمكن.

الحل: من أجل حل هذه المشكلة وتحديد خطة الإنتاج المثلى المطلوبة، يتطلب الأمر في البداية صياغة النموذج الرياضي للمشكلة قيد الدرس في ضوء البيانات المتوفرة في الجدول أعلاه. ومن أجل صياغة النموذج الرياضي يتطلب الأمر تحديد المتغيرات المجهولة التي تعبر عن كمية ونوعية المنتجات المطلوب إدراجها ضمن خطة الإنتاج وذلك كما يلي:

نفرض أن كمية الإنتاج بشكل عام هو ⇐ X.

∴ $X_1 \Leftarrow$ No. 1 كمية المنتج

$X_2 \Leftarrow$ No. 2 كمية المنتج

$X_3 \Leftarrow$ No. 3 كمية المنتج

$X_4 \Leftarrow$ No. 4 كمية المنتج

$X_5 \Leftarrow$ No. 5 كمية المنتج

نفرض أن مقدار هامش الربح الكلي المتوقع ⇐ Z

واستناداً لما تقدم وعلى أساس البيانات المتوفرة، فإن صيغة النموذج الرياضي للمشكلة قيد الدرس هي:

$$(1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4X_1 + X_2 + 1.5X_3 + 2.5X_4 \leq 150$$

$$(2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4 + 7X_5 \leq 180$$

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2X_2 + 2X_3 + 2X_5 \leq 180$$

$$Z = 2X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_4 + X_5 \longrightarrow Max.$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_5 \geq 0$$

أن هـذه الصـيغة للنمـوذج الريـاضي للمشـكلة تسـمى الصـيغة القانونيـة Canonical From، ومن أجل تطبيق طريقة السمبلكس اللازمـة لحـل المشـكلة يتطلب الأمر تحويلها إلى الصيغة القياسية Standard From وذلك كما يلي:

نفرض أن:

S ⇐ هو مقدار مستلزمات الإنتاج غـير المسـتغلة، وهـو عبـارة عـن المـتمم الرياضي أو ما يعرف بالمتغير الراكد Slack Variable.

وبعد إضافة هذا المتغير إلى علاقات النموذج الرياضي أعلاه نحصل على ما يلي:

$$(1) \text{ ———— } 4X_1 + X_2 + 1.5X_3 + 2.5X_4 + \quad + \quad = 150$$

$$(2) \text{ ———— } 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4 + 7X_5 + S_2 = 180$$

$$(3) \text{ ———— } 2x_2 + 2X_3 + \quad + 2X_5 + S_3 = 120$$

$$Z = 2X_1 + X_2 + 4X_3 + 2X_3 + 2X_4 + X_5 + 0.S_1 + 0.S_2 + 0.S_2 + 0.S_3 \longrightarrow Max$$

$$X_1, X_2, \ldots, X_5 \geq 0$$

$$S_1, S_2, \ldots, S_3 \geq 0$$

أن حـل هـذه المشـكلة بطريقـة السـمبلكس تـتم مـن خـلال الجـدول رقم (2-6) الذي يتضح من خلاله مراحل تقدم الحل الذي يتم الحصول عليـه. وهو كما يلي:

1) الحل الممكن: Feasible Solution : (توقف كامل لعملية الإنتاج)

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0 \\ S_1 = 150 \quad , \quad S_2 = 180 \, , \quad S_3 = 120 \end{array}\right\} Z = 0$$

2) الحل الأفضل: Best Solution : (تقديم المنتج الثالث فقط)

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = 0 \\ X_3 = 60 \\ S_1 = 60 \\ S_2 = 120 \end{array}\right\} Z = 240$$

3) الحل الأمثل: Optimal Solution : (تقديم المنتج الثالث والرابع)

جدول (2-6) الطريقة المبسطة الذي يحوي النتائج النهائي (الحل الأمثل) للمشكلة

المتغيرات		X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	S_1	S_2	S_3	قيمة المتغير الأساسي b_i	معامل المتغير الأساسي في دالة الهدف C_B
معامل المتغير في دالة الهدف	C_j	2	1	4	2	1	0	0	0		
المتغيرات الأساسية	S1	4	1	3/2	5/2	0	1	0	0	150	0
	S2	2	3	1	2	7	0	1	0	180	0
	S3	0	2	(2)	0	2	0	0	1	120	0
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	قيم دالة الهدف
C_j-Z_j		2	1	4	2	1	0	0	0		
المتغيرات الأساسية	S1	4	-1/2	0	(5/2)	-3/2	1	0	-3/4	60	0
	S2	2	2	0	2	6	0	1	-1/2	120	0
	X3	0	1	1	0	1	0	0	1/2	60	4
Z_j		0	4	4	0	4	0	0	2	240	قيم دالة الهدف
C_j-Z_j		2	-3	0	(2)	-3	0	0	-2		
المتغيرات الأساسية	X4	8/5	-1/5	0	1	-3/5	2/5	0	-3/10	24	2
	S2	-6/5	12/5	0	0	36/5	-4/5	1	1/10	72	0
	X3	0	1	1	0	1	0	0	1/2	60	4
Z_j		16/5	18/5	4	2	14/5	4/5	0	7/5	288	قيم دالة الهدف
C_j-Z_j		-6/5	-13/5	0	0	-9/5	-4/5	0	-7/5		

($X_3 = 60$) ويعني إنتاج 60 وحدة من المنتج الثالث

($X_4 = 24$) ويعني إنتاج 24 وحدة من المنتج الرابع، وعدم إنتاج المنتجات الباقية أن هذه الخطة سوف تحقق الاستغلال الكامل لمستلزمات الإنتاج (الموارد الأولية، ساعات العمل) ويبقى 72 وحدة الطاقة الكهربائية كفائض غير مستغل وأن: $Z = 288$

ثانياً: الحل بأسلوب السمبلكس (الطريقة المبسطة) في حالة تصغير دالة الهدف (Min.Z) مع وجود خليط من العلاقات الرياضية ($\leq , = , \geq$) في القيود:

إن بعض المشاكل التطبيقية في الواقع العملي، يتم التعبير عنها من خلال نموذج رياضي تكون فيه دالة الهدف تصل إلى أقل ما يمكن وقيود النموذج الرياضي بصيغة ($\geq$ أكبر أو يساوي) مع وجود بعض الحالات للأنواع الأخرى من القيود التي تحمل العلاقات الرياضية (= يساوي ، $\leq$ أقل ويساوي)، إن تحويل هذا النوع من النماذج الرياضية من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، يتم بعد أن تضاف وتطرح متغيرات معينة، كما هو واضح في الجدول التالي:

نوع العلامة الرياضية في القيد	نوع المتغير الذي يضاف إلى القيد	نوع المتغير الذي يضاف إلى دالة الهدف
$\leq$ أقل أو يساوي	+ S	$Max.Z \longrightarrow \mp\ 0.S$ $Min.Z \longrightarrow \mp\ 0.S$
$\geq$ أكبر أو ويساوي	- S + R	$Max.Z \longrightarrow \mp 0.S - MR$ $Min.Z \longrightarrow \mp 0.S + MR$
= يساوي	+ R	$Max.Z \longrightarrow\ - MR$ $Min.Z \longrightarrow\ + MR$

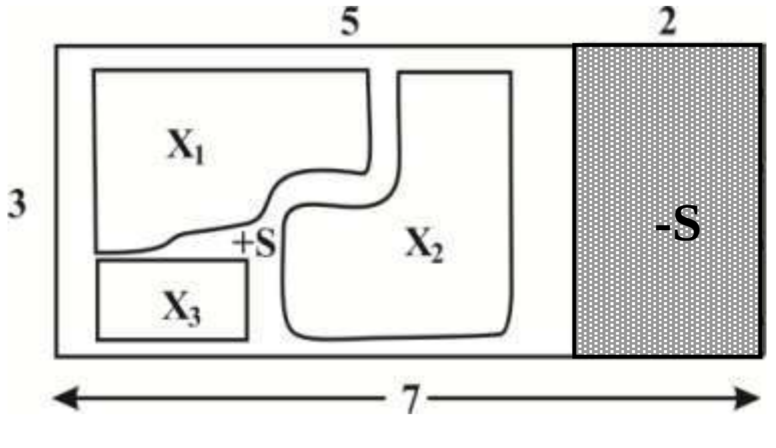
حيث أن:

1) S + = المتمم الرياضي ويعرف باسم المتغير الراكد .Slack Var الذي هو في مفهوم الإنتاج يمثل مقدار مستلزمات الإنتاج غير المستغلة أو ما يعرف بالتلف الطبيعي.

2) S - = المتمم الرياضي ويعرف باسم المتغير الفائض (Surplus Variable) والذي يسمى بالتلف الطبيعي الناجم عن الإهمال أو انخفاض مستوى الأداء والكفاءة.

ويمكن توضيح الفرق بين (S+) و (S-) من خلال المثال التالي:

على افتراض أن هنالك قطعة من الخشب مطلوب تفصيلها على النحو التالي:



عليه فإن:

(S+) يعبر عن مقدار التالف أو العادم Trim Loss.

(S-) يعبر عن (سحب كمية أكثر من المطلوب من المخازن بسبب عدم وضوح الأوامر أو الإهمال، لذلك تعتبر هذه الكمية فائض عن الحاجة).

3) المتغير الاصطناعي Artificial Variable (R) الذي يضاف إلى القيود أو يطرح أو يضاف في دالة الهدف، حيث تظهر في الدالة المذكورة بمعامل كبير جداً يسمى (M – الكبيرة)[1].

إن حل النموذج الرياضي الذي يحمل المواصفات أعلاه ويتم بعد أن تحويله إلى الصيغة القياسية بعد إضافة المتغيرات (S- , R, -S+) حيث يتم حله وفق اثنين من الطرق الأساسية، وهذه الطرق هي:

1- طريقة المرحلتين Two – Phase Technique.

2- طريقة (M – الكبيرة) M- Technique Method.

إن اعتماد أي من هذه الطرق لا يختلف عن طريقة السمبلكس السابقة (Max.Z) ما عدا الملاحظات التالية:

1- المتغير الداخل، هو ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة سالبة وذلك في الحقل (Cj – Zj).

2- يتم الوصول إلى مرحلة الحل الأمثل إذا كانت كل قيم الحقل (Cj - Zj) موجبة وأصفار، أي أن $0 \geq$ (Cj – Zj).

3- إن قيمة دالة الهدف (Z) في المرحلة الأولى من جدول السمبلكس تكون أعلى ما يمكن، وبعد ذلك تبدأ في التناقص حيث تكون في آخر مرحلة من جدول السمبلكس أقل ما يمكن والذي يمثل الحل الأمثل.

---

(1) يمكن أن تأخذ هذه القيمة مضاعفات الرقم 10 (000،1000،100،10) ولذلك بحيث تكون أكبر من أي معامل آخر في النموذج، وذلك لأجل أن تمنع ظهور التغير R في النتائج النهائية.

وبالمقارنة بين طريقة (M – Technique) وطريقة المرحلتين فإنه بالنسبة للطريقة الأولى هي الأكثر شيوعاً في الواقع العملي.

المشكلة ر قم (1): من إحدى المنظمات الإنتاجية تم الحصول على النموذج الرياضي التالي الذي يعبر عن إحدى المشاكل الإنتاجية:

$$-X_1 + X_2 + X_3 = 1$$
$$2X_1 + X_2 - X_3 \geq 4$$
$$Z = -4X_1 + 8X_2 + 4X_3 \longrightarrow Min$$
$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ \geq \ 0$$

المطلوب: حل المشكلة بطريقة السمبلكس Simplex Method وإيجاد النتائج النهائية.

الحل: الخطوة الأولى في حل هذه المشكلة هو تحويل النموذج الرياضي إلى الصيغة المستقرة وذلك بالاعتماد على الجدول السابق وكما يلي:

$$-X_1 + X_2 + X_3 = 1$$
$$2X_1 + X_2 - X_3 - S_2 + R_2 = 4$$
$$Z = 4X_2 + 8X_2 + 4X_3 + 0.S_2 + MR_1 + MR_2 \longrightarrow Min$$
$$X_1 \ , \ X_2 \ , \ X_3 \ \geq \ 0$$
$$R_1 \ , \ R_2 \ , \ R_3 \ \geq \ 0$$

ولو فرضنا أن قيمة كمية كبيرة جداً على سبيل المثال 10 وحدة فإن دالة الهدف تصبح كما يلي:

$$Z = 4X_2 + 8X_2 + 4X_3 + 0.S_2 + 10R_1 + 10R_2 \longrightarrow Min$$

ويتم تفريغ بيانات النموذج في جدول السمبلكس (2-7) الذي لا تختلف العمليات الحسابية فيه عما كانت عليه الحالة السابقة عندما كانت دالة الهدف تصل إلى أعلى قيمة لها (Max.Z) ما عدا الأمور التالي:

1- بعد أن يتم الحصول على الحل الممكن في الجزء الأول من جدول السمبلكس، يكون تحديد المتغير الداخل للمرحلة القادمة من جدول السمبلكس على أساس أنه ذلك المتغير الذي يقابل أكبر قيمة بالسالب. وفي مشكلتنا هذه يكون المتغير الداخل هو X_2.

2- يكو ن الحل أمثلاًإذا كانت قيم وعناصر الحقل (Cj - Zj) هي قيم ذات علامات موجبة وأصفار، أي أن:

$$Cj - Zj \geq 0$$

جدول رقم (2-7) مراحل عملية الحل والحصول على الحل الأمثل

المتغيرات X_j		X_1	X_2	X_3	S_2	R_1	R_2	قيمة المتغير كأساس	معامل المتغيرات في دالة الهدف
معاملات المتغيرات في دالة الهدف		4	8	4	0	10	10	b_1	C_B
المتغيرات الأساسية	R_1	-1	1	1	0	1	0	1	10
	R_2	2	1	-1	-1	0	1	4	10
Zj		10	20	0	-10	10	10	50	في دالة الهدف Z
C_j Z_j		-6	-12	4	0	0	0		
المتغيرات الأساسية	X_1	-1	1	1	0	1	0	1	8
	R_2	3	0	-2	-1	-1	1	3	10
Zj		22	8	-12	-10	-2	10	38	قسمة دالة الهدف **Z**
C_j Z_j		**-18**	**0**	**16**	**10**	**12**	**0**		
المتغيرات الأساسية	**X_1**	**0**	**1**	**1/3**	**-1/3**	**2/3**	**1/3**	**2**	**8**
	X_2	**1**	**0**	**-2/3**	**-1/3**	**-1/3**	**1/3**	**1**	**4**
Z_j		**4**	**8**	**0**	**-12/3**	**5**	**4**	**20**	قسمة دالة الهدف **Z**
C_j Z_j		**0**	**0**	**4**	**12/3**	**5**	**6**		

إن النتائج التي تم الحصول عليها في إطار جدول السـمبلكس (7–2) كانـت كما يلي:

الحل الممكن Feasible Solution

$R_1 \longrightarrow 1$

$R_2 \longrightarrow 4$

$Z \longrightarrow 50$

الحل الأفضل Best Solution

$X_1 \longrightarrow 1$

$R_2 \longrightarrow 3$

أسئلة الفصل الثاني

س1: ما هي نماذج البرمجة الخطية الشائعة الاستخدام في الواقع العملي.

س2: اثنين من المنتجات I .II تحتاج إلى أربعة أنواع من المواد الأولية من مقادير مختلفة وهي A , B , C , D كما هو واضح في الجدول التالي:

المنتجات	المواد الأولية			
	A.	B.	C.	D.
I	3	2	4	0
II	1	5	0	5
المخلفات في كغم	0.8	1.2	0.6	0.9

المطلوب هو:

1- ما هي كمية المواد الأولية الواجب شرائها واللازمة لإنتاج:

أ- على الأقل 1000 وحدة المنتج .I.

ب- على الأقل 2000 وحدة من المنتج .II.

2- ما هي أقل كلفة كلية ممكن للمخلفات إذا علمت أن تكاليف 1 كغم منها هو 2.5دولار.

النتائج النهائية:

يوجد حلول غير محدودة لهكذا نوع من المشاكل ومن بينها ما يلي:

$$X_1 = X_4 = 0$$
$$X_2 = 400$$
$$X_3 = 50$$
$$F(X_1 , X_2 , X_3 , X_4)=1275$$

س3: إحدى منظمات الأعمال المتخصصة بصناعة علب لتعبئة نوع معين من المواد الغذائية، وقد توفرت نوعين من صفائح الألمنيوم لهذا الغرض وذلك كما يلي:

21500 متر بعرض 1.5 متر.

14000 متر بعرض 1.8 متر.

من هذه القطع يتم الحصول على ما يلي:

- الغطاء العلوي والسفلي.
- الجوانب.

البيانات المتعلقة بهذه المشكلة هي كما في الجدول التالي:

مكونات العلبة	أسلوب القطع لكل 1 متر من الألمنيوم					
	عرض 1.5 متر			عرض .18		
	I.	II.	III.	I.	II.	III.
الأغطية	70	15	10	30	20	-
جوانب العلبة	-	20	30	25	30	50

المطلوب: تعظيم أكبر قدر ممكن من الطلب وبأقل قدر ممكن من التلف.

النتائج النهائية:

- يتم استلام 726250 علبة
- ويتم استغلال 100٪ للألمنيوم المتوفر

$X_1 = 20625$

$X_2 = 0$

$X_3 = 875$

$X_4 = 0$

$X_5 = 0$

$X_6 = 14000$

س4: أحد المعامل المتخصصة بصناعة الشبابيك استملت طلب لتجهيز زجاج لـ300 شباك: ولكل شباك واحد يتم استخدام.

- زجاجة من النوع e_1.
- زجاجة من النوع e_2.

الزجاج	أساليب القطع		
	I.	II.	III.
e_1	6	4	3
e_2	0	4	6
المخلفات في كغم	0.6	1.6	1.2

يوجد ثلاثة أساليب لقطع الزجاج كما هو واضح من الجدول أعلاه.

المطلوب:

1- صياغة النموذج الرياضي للمشكلة.

2- بناء النموذج الرياضي المقابل.

3- حل المشكلة بيانياً وما هي أقل قيمة لدالة الهدف.

النتائج النهائية:

$$X_1 = 25$$
$$X_2 = 0$$
$$X_3 = 150$$
$$F(X_1, X_2, X_3) = 195$$

س5: إحدى منظمات الأعمال المتخصصة بإنتاج الألبسة الجاهزة ترغب في طرح ثلاث أنواع من قياسات الألبسة الجاهزة وكما يلي:

- حجم صغير 2.5 بمقدار 625 قطعة.
- حجم متوسط 3.0 بمقدار 930 قطعة.
- حجم كبير 4.5 بمقدار 2025 قطعة.

وقد توفرت لدى المنظمة المذكورة نوعين من قطع الأقمشة أحدهما بقياس 8 والأخرى مقياس 10 ومن الجدير بالذكر هنا أن الإنتاج من القياس 8 لا يمكن أن يتجاوز المقدار 30.

المطلوب:

1. تنظيم الجدول الخاص باحتمالات وبدائل القطع.
2. ما هي كمية الإنتاج من الأحجام الثلاث بحيث يكون التالف أقل ما يمكن.

الحل: نتائج الحل المطلوب هو:

الألبسة	أساليب القطع											
	قياس 8					قياس 10						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
حجم صغير (2.5)	3	2	1	0	0	4	2	2	1	1	0	0
حجم متوسط (0.3)	0	1	0	2	1	0	1	0	2	1	3	0
حجم كبير (4.5)	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	2
المخلفات	0.5	0	1	2	0.5	0	2	0.5	1.5	0	1	1

$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = X_7 = X_8 = X_9 = 0$

$X_5 = 30\ ,\ X_{10} = 250\ ,\ X_{11} = 10\ ,\ X_{12} = 85$

$F(X_1\ ,\ X_2\ ,......\ X_{12}) = 110$

س6: توفر لديك النموذج الرياضي التالي:

(1) $X_1 + X_2 \leq 5,$

(2) $X_1 + X_2 \geq 1,$

(3) $X_1 + 2X_2 \leq 2,$

(4) $X_1 \leq 0$

(5) $0 \leq X_2 \leq 3,$

(6) $Z(X_1, X_2) = \dfrac{3X_1 + 2X_2 + 4}{6X_1 - 4X_2 + 16} \rightarrow Max.$

النتائج النهائية:

$X_1 = 2\ ,\qquad X_2 = 3$

س7: منظمة أعمال ترغب في طرح اثنين من المنتجات باستخدام اثنين من وسائل الإنتاج وهي:

$I \Leftarrow$ متوفر منها 8000000 وحدة .

$II \Leftarrow$ متوفر منها 5000000 وحدة .

البيانات المتعلقة باستهلاك هذه الوسائل لكل منتوج هو كما يلي:

وسائل الإنتاج	استهلاك وسائل الإنتاج لكل منتوج	
	C	D
I.	1	4
II.	1	1

المنظمة استلمت طلبية للحصول على 2 مليون من المنتـوج C ، وأن تكـاليف إنتاج المنتج C هو 8 D هو 12 دينار، وقد علمت أن الربح المتوقع من المنتج C هو 2 دينار والمنتج D هو 4 دينار ما هو الحل لهكذا مشكلة.

النتائج النهائية:

$$X_1 = 2000000$$
$$X_2 = 1500000$$

س8: إحدى المؤسسات الصناعية الكبيرة التي تخصصت بالصناعات الحديديـة لأغراض التصدير، قامت بطرح نوعين من المنتجات الحديدية (Z_2 , Z_1).

البيانات المتعلقة بعملية الإنتاج موضحة بالجدول التالي:

المتوفر من المواد	الحديد		وحدة القياس	المواد الأولية ومستلزمات الإنتاج
	Z_2	Z_1		
1200000	1.5	2	T	استهلاك مستلزمات الإنتاج لكل t1
54000000	90	60	H	مقدار العمل المطلوب لكل t1
270000	0.3	0.3	T	استهلاك المواد المختلفة
	15000	10000	Zt	تكاليف إنتاج t1 حديد
	50000	25000	dolar	سعر تصدير t1 حديد
	200000	150000	t	المتطلبات الدنيا
	70000	700000	t	المتطلبات القصوى

وقد علمت ما يلي:

يمكن أن تحصل المؤسسة على العملة الصعبة ($) من تصدير الحديد فـيما لـو قامت بتخفيض الكلفة الخاصة بالإنتاج.

المطلوب: ما هو أقصى ما يمكن أن تحصل عليه المؤسسة من العملة الصعبة محسوباً لكل 1 دينار من التكاليف الخاصة بالإنتاج في ظل الحل الأمثل.

النتائج النهائية:

$X_1 = 1500\ 000$
$X_2 = 5000\ 000$

وأن لكل 1 دينار من الكلف الخاصة بالإنتاج يتم الحصول على 0.319 دولار

س9: لطرح نوعين من المنتجات يتم استهلاك مقادير مختلفة من مستلزمات الإنتاج كما هو واضح في الجدول التالي:

مقدار ما هو متوفر	المنتجات		المواد الأولية ومستلزمات الإنتاج
	II	I	
12000	1	3	**مواد أولية**
12000	3	1	**مكائن ومعدات**
5000	1	1	**عمل**
	200	400	**سعر التصدير**
	400	600	**تكاليف وحدة الإنتاج**

وقد علمت وقد علمت أن المنظمة الإنتاجية هذه تسلمت طلبية لإنتاج 1500 وحدة من المنتج (I) والمنتج (II.).

المطلوب: ما هي كمية ونوعية الإنتاج على أساس اعتماد مؤشر تعظيم مقدار العملة الصعبة بالدولار التي يتم الحصول عليها مقابل أقل مقدار ممكن من التكاليف محسوبة بالدينار وما هي حصة الدينار الواحد من العملة الصعبة.

النتائج النهائية:

$X_1 = 3500$

$X_2 = 1500$

وأن لكل 1 دينار من الكلف الخاصة يمكن أن يلحق المنشأة إيراد من العملة الصعبة $ بمقدار 0.63

س10: توفرت لديك البيانات الواردة في الجدول التالي:

المواد الأولية ومستلزمات الإنتاج	وحدات القياس	I	II	مقدار المتوفر من المواد الأولية
المواد المطلوبة لكل وحدة واحدة من المنتوج	KG	3	2	6
العمل المطلوب على الماكنة A لكل وحدة واحدة	ساعة/ ماكنة	6	3	9
العمل المطلوب على الماكنة B لكل وحدة واحدة	ساعة/ ماكنة	4	4	8
تكاليف الإنتاج	دينار	10	8	
سعر التصدير	Dolar	12	8	
أقل مقدار يمكن أن يحتاج إليه المستلم للبضاعة	Tys.kg	0.5	0.5	

المطلوب: صياغة خطة لإنتاج (II,I) بما يؤمن أعلى مقدار ممكن من العملة الصعبة في أقل مقدار ممكن من التكاليف.

النتائج النهائية:

$X_1 = 1250$

$X_2 = 500$

$F(X_1, X_2) = 0.000115$

س11: إحدى المشاكل الإنتاجية، تحكمها القيود التالية:

$$(1)\quad -X_1 + X_2 \leq 1,$$
$$(2)\quad X_1 + 2X_2 \geq 5,$$
$$(3)\quad 0 \leq X_1 \leq 3,$$
$$(4)\quad X_2 \geq 0$$

أوجد الحل الأمثل إذا علمت أن دالة الهدف يمكن أن تكون وفق الصيغ التالية:

$$a.\quad X_1 + X_2 \to Max.$$
$$b.\quad X_1 - 4X_2 \to Min.$$
$$c.\quad \frac{X_1 + X_2}{X_1 - 4X_2} \to Max.$$
$$d.\quad \frac{X_1 - 4X_2}{X_1 + X_2} \to Min.$$

النتائج النهائية:

$a)\ X_1 = 3 \quad , \quad X_2 = 4$

$b)\ X_1 = 3 \quad , \quad X_2 = 4$

$c)\ X_1 = 1 \quad , \quad X_2 = 2$

$d)\ X_1 = 1 \quad , \quad X_2 = 2$

الفصل الثالث

اتخاذ القرار الأمثل باستخدام نماذج البرمجة الخطية المحورة

1.3. النموذج المقابل **Dual** في البرمجة الخطية

2.3. النموذج الرياضي الذي تكون فيه دالة الهدف (Z) هي دالة لمتغير آخر في النموذج.

3.3. النموذج الرياضي لاتخاذ القرار الأمثل عندما تكون قيم المتغيرات الأساسية أعداداً صحيحة **Integer**.

3.3. النموذج الرياضي لاتخاذ القرار الأمثل في ظل دالة هدف مزدوجة.

5.3. نموذج البرمجة الخطية الخاضع لتأثيرات العوامل في دالة الهدف والمحددات.

- أسئلة وتمارين الفصل الثالث

3

الفصل الثالث

اتخاذ القرار الأمثل باستخدام نماذج البرمجة الخطية المحورة

إن بعض نماذج البرمجة الخطية يجري تحويرها لغرض استخدامها في اتخاذ القرارات اللازمة لمعالجة مشكلة تتصف بخصوصية معينة، أو لغرض الحصول على مؤشرات وتحليلات لم يكن بالإمكان الحصول عليها باستخدام نماذج البرمجة الخطية العادية. والتحوير المقصود هنا هو إجراء تغييرات رياضية وجبرية في صيغة القيود أو دالة الهدف أو الاثنين معاً، كما سوف نلاحظ ذلك في الفقرات أدناه.

1.3. النموذج المقابل Dual في البرمجة الخطية

إن نموذج البرمجة الخطية الذي سبق وإن تم توضيحه. يمكن إعادة صياغته للحصول على مؤشرات ودلالات أخرى لم يكن بالإمكان الحصول عليها سابقاً في ظل الصيغة السابقة. حيث يجري تغيير مواقع المتغيرات مع تبديل الرموز المعبرة عنها وكذلك بالنسبة للعلامات الرياضية التي تفصل الجانب الأيمن عن الجانب الأيسر في كل علاقة، ويشمل التغيير أيضاً معادلة دالة الهدف، حيث إذا كانت تصل إلى أكبر قيمة ممكنه لها (.Max) في ظل النموذج الأصلي، فإنها سوف تصبح أقل قيمة (Min) في ظل النموذج المقابل [1]:

(1) P.S. llilicy , G.J. Liaberman, Operations, Research , 4ed. Holden- Day , Ine. 2003, p.75

إن للنمـوذج المقابـل اسـتخدامات كثـيرة في مختلـف المجـالات الإداريـة والاقتصادية وذلك عـلى مسـتوى منظمـة الأعـمال بشـكل خـاص والاقتصـاد الوطني بشكل عام. ويهدف هذا النموذج إلى تقديم تحليلات ومؤشرات مختلفـة لم يكن بالإمكان الحصول عليها باستخدام النموذج الأصلي.

لتوضيح فكرة صياغة النمـوذج المقابـل، تعـرض أدنـاه صـيغة معينـة مـن النموذج العام للبرمجة الخطية:

المطلوب:

إيجاد قيم المتغيرات $X_1, X_2, \ldots, X_n$

التي تحقق الشروط التالية:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\ X_1 + a_{12}\ X_2 + \ldots + a_{1n}\ X_n \ \leq\ b_1 \\
a_{21}\ X_1 + a_{22}\ X_2 + \ldots + a_{2n}\ X_n \ \leq\ b_2 \\
\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
a_{m1}\ X_1 + a_{m2}\ X_2 + \ldots + a_{mn}\ X_n \ \leq\ b_m
\end{array}
$$

$X_j \geq 0$ (حيث أن: $j = 1, 2, \ldots, n$)

ويجعل من قيمة دالة الهدف أقصى ما يمكن، أي:

$$\longrightarrow Z = C_1\ X_1 + C_2\ X_2 + \ldots + C_n\ X_n \quad Max.$$

وبعد إدخال المتغيرات الثابتة y_i (حيث أن: $i = 1, 2, \ldots, m$) نحصل عـلى ما يلي:

$$y_1 = b_1 - (a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + ... + a_{1n} X_n)$$
$$y_2 = b_2 - (a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + ... + a_{2n} X_n)$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$y_m = b_m - (a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + ... + a_{mn} X_n)$$

ويمكن تقديم مفردات هذا النموذج من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (3-1)

	$-y_1$	$-y_2$	...	$-y_n$	1
$y_1=$	a_{11}	a_{22}	...	a_{1n}	b_1
$y_2=$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$y_m=$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
$Z_1=$	$-C_1$	$-C_2$	...	$-C_n$	0

أما بالنسبة للنموذج المقابل، فإن الصيغة الرياضية له هي:

المطلوب: إيجاد قيم المتغيرات الأساسية $u_1, u_2, ... u_m$

التي تحقق الشروط التالية:

$$u_{11} u_1 + a_{12} u_2 + ... + a_{m1} u_m \geq C_1$$
$$a_{21} u_1 + a_{22} u_2 + ... + a_{m2} u_m \geq C_2$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + ... + a_{mn} u_m \geq C_n$$

$u_i \geq 0$ (حيث أن: $i = 1 , 2 , ..., m$)

ويجعل من قيمة دالة الهدف أقصى ما يمكن، أي:

$$F = b_1 u_1 + b_2 u_2 + ... + b_m u_m$$

وبعد إدخال المتغيرات الثابتة C_j (حيث أن: $j = 1 , 2 , ..., n$) نحصل على ما يلي:

$$g_1 = (a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + ... + a_{m1} u_m) - C_1 \geq 0$$
$$g_2 = (a_{12} u_1 + a_{22} u_1 + ... + u_{m2} u_m) - C_2 \geq 0$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$g_n = (a_{1n} u_1 + a_{2n} u_2 + ... + a_{mn} u_m) - C_n \geq 0$$

ويمكن تقديم مفردات هذا النموذج من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (3-2)

	u_1	u_2	...	u_m	1
$g_1=$	a_{11}	a_{22}	...	a_{1n}	$-C_1$
$g_2=$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$-C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$g_n=$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$-C_m$
$F=$	b_1	b_2	...	b_m	0

ويمكن دمج الجدول رقم (3-1) الذي يعبر عن النموذج الأصلي مع الجدول (3-2) الذي يعبر عن النموذج الثنائي في جدول واحد وهو الآتي:

(جدول رقم 3-3)

	u_1	u_2	...	u_m	1
	$y_1=$	$y_2=$	...	y_m	$Z=$
$-X_1g_1=$	a_{11}	a_{22}	...	a_{1n}	$-C_1$
$-X_2g_2=$	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$-C_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$-X_ng_n=$	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$-C_m$
$F=$	b_1	b_2	...	b_m	0

في ضوء ما تقدم يمكن أن نستنتج ما يلي:

1- إذا كانت المعاملات الداخلة في تركيب النموذج الأصلي تشكل المصفوفة A وذلك كما يلي:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\,.... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\,.... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2}\,.... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

فإن المعاملات الداخلة في تركيب النموذج المقابل سوف تأخذ الرمز A^t والذي يعبر عن المصفوفة التالية:

$$A^t=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\,.... & a_{am1} \\ a_{12} & a_{22}\,.... & a_{am2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n}\,.... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2- إن القيم الداخلة في تركيب عمود القيم الحرة (الجهة اليمنى من العلاقات الرياضية) تشكل بمثابة معاملات للمتغيرات الأساسية X_j (حيث أن: $j = 1, 2, \ldots, n$) في دالة الهدف للنموذج الأصلي.

3- العلامة الرياضية التي تفصل طرفي العلاقة الرياضية إذا كانت $\leq$ أقل أو يساوي في النموذج الأصلي تصبح $\geq$ أكبر أو يساوي في النموذج المقابل وبالعكس.

4- دالة الهدف إذا كانت تصل إلى أكبر قيمة لها في النموذج الأصلي، فإنها سوف تصل إلى أقل قيمة لها في حالة النموذج المقابل.

في سبيل الحصول على حل للنموذج الأولي الموضح من خلال الجدول (3-1)، فإن المطلوب هنا هو أن تصبح القيم الموجودة في يسار الجدول مساوية إلى الصفر. أما المتغيرات الموجودة فوق الجدول فإنها تصبح مساوية ما يعادلها من قيم في صف دالة الهدف F. وإن أكبر قيمة أو أقل قيمة لدالة الهدف تكون موجودة في حقل دالة الهدف F وعمود القيم الحرة.

ولتقديم صورة أوضح عن طبيعة النموذج المقابل وعلاقته بالنموذج الأصلي نذكر أدناه النظريات التالية[1]:

(1) D. Rogalskieg, Programowonic Liniowe – Algorytmy izadania, UN, TODZ , 1983. p.64.

النظرية رقم (1): إذا كان للنموذج المقابل حل أمثل معين، فإن لهذا الحل الأمثل صيغة حل آخر،، أي بشكل عام لأي حل أمثل يكون ما يلي:

$$Z_{max} = F_{min}$$

النظرية رقم (2): إن القيمة المثلى للمتغيرات الأساسية المتمثلة بالرمز X^*_i الداخلة في صيغة النموذج المقابل تحدد مدى الزيادة القصوى لقيمة دالة الهدف في ظل النموذج الأصلي Z_{max} عندما يزداد المقادار b_i (الذي يمثل المحددات) بمقدار وحدة واحدة، أي أن:

$$u_i^* = \frac{\Delta Z_{\max}}{\Delta b_i} (i = 1,\ 2\ ,....,m)$$

ويمكن التعبير عن ذلك بصيغة أخرى كما يلي:

$$\Delta Z_{\max} = u_i^* \Delta b_i$$

النظرية (3): إذا كانت أحد قيود الحل الأمثل للنموذج الأصلي له علاقة رياضية محددة بدون اختيار أي: أما < أكبر أو > أصغر، فإن المتغير الأساسي الذي يقابل هذا القيد الذي يظهر في الحل الأمثل للنموذج المقابل يكون مساوياً للصفر. أما إذا كان أحد المتغيرات في الحل الأمثل له قيمة موجبة أكبر من الصفر، فإن القيد المقابل له يكون له قيمة مساوية للصفر.

على سبيل المثال وبالاعتماد على الجدول رقم (3-3) إذا كان لدينا حل أمثل لنموذج بصيغته الأصلية، ومنه كان لدينا القيد التالي:

$$y_k^* = b_k - (a_{k1}\ X_1^* + a_{k2}\ X_2^* + ... + a_{kn}\ X_n^*) > 0$$

فإن قيمة المتغير الذي يقابل هذا القيد الذي يظهر في الحل الأمثل للنموذج المقابل يكون:

$$X^*_k = 0$$

أما إذا كان لدينا $U^*_k > 0$ فإن القيد المقابل له هو.

$$y_2^* = b_2 - (a_{11}\ X_1^* + a_{12}\ X_2^* + ... + a_{2n}\ X_n^*) = 0$$

إذا ظهر لدينا في نموذج معين بصيغته الأصلية اثنين من القيود علامة أحدهم أما $\leq$ أو $\geq$ وكانت علامة القيد الآخر هي التساوي (أي =) كما هو واضح في النموذج التالي:

المطلوب: إيجاد قيم المتغيرات الأساسية التالية $X_1, X_2, ..., X_n$ التي تحقق الشروط التالية:

$$\begin{aligned}
&a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + ... + a_{in} X_n \leq b_i && (i=1,2,...,k)\\
&a_{i1} X_1 + a_{i2} X_2 + ... + a_{in} X_n = b_i && (i=k+1,k+2,...,m)\\
&X_i \geq 0 && (i=1,2,...,n)
\end{aligned}$$

وتجعل قيمة دالة الهدف أعلى ما يمكن، أي:

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_n\ X_n \longrightarrow Max$$

المطلوب: إيجاد قيم المتغيرات الأساسية التالية $u_1, u_2, ..., u_m$ التي تحقق الشروط التالية:

$$\begin{aligned}
&a_{1j}\ u_1 + a_{2j}\ u_2 + ... + a_{mj}\ u_m \geq C_j && (j=1,2,....,m)\\
&u_i \geq 0 && (i=1,2,....,k)
\end{aligned}$$

وينبغي الإشارة هنا، إنه إذا كانت علامة القيود في النموذج الأصلي متنوعة، فيها علاقة التساوي (=) وعلامة عدم التساوي (≤) أو (≥) فإن المتغيرات الأساسية في النموذج المقابل يمكن أن تكون قيمها مساوية إلى الصفر في حين إذا كان لدينا نموذج رياضي فيه قيود لها علامة عدم المساواة (أي ≥) فإن حل هذا النموذج من خلال تحويله إلى النموذج المقابل يكون أكثر بساطة كما هو واضح في المشكلة التالية:

مشكلة رقم (1): في إحدى منظمات الأعمال الصناعية تتطلب العملية الإنتاجية فيها تشغيل العمال ثلاث وجبات عمل (أي 24 ساعة). إن الحاجة إلى عدد العمال خلال ساعات العمل اليومي تتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (3-4) بيانات المشكلة

عدد العمال المطلوب تشغيلهم	حدود ساعات العمل
15	1−5
30	5−9
26	9−13
32	13−17
30	17−21
19	21−1

إن عدد الساعات لوجبة العمل الواحدة تبلغ 8 ساعات. علماً بأن تبديل العمال يتم في الساعات : 21 ، 17 ، 13 ، 9 ، 5 ، 1 .

المطلوب:

أ- ما هو أقل عدد ممكن من العمال ينبغي تشغيلهم بما يضمن استمرارية العملية الإنتاجية.

ب- ما هي الخطة التي بموجبها تستطيع إدارة الأفراد تشغيل أقل عدد ممكن من العمال.

الحل: نفرض أن X هو عدد العمال الذين يبدأون العمل في الخطوط الإنتاجية في كل ساعة تبديل كما يلي:

في ساعة التبديل 1 $X_1 \longleftarrow$

في ساعة التبديل 5 $X_2 \longleftarrow$

في ساعة التبديل 9 $X_3 \longleftarrow$

في ساعة التبديل 13 $X_4 \longleftarrow$

في ساعة التبديل 17 $X_5 \longleftarrow$

في ساعة التبديل 21 $X_6 \longleftarrow$

والمطلوب أن يتم ذلك باستخدام أقل عدد من العمال أي:

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 \longrightarrow Min$$

في ظل تحقق الشروط المستمدة من الجدول (3-4) وهي:

$$X_1 + X_2 \geq 30$$
$$X_2 + X_3 \geq 26$$
$$X_3 + X_4 \geq 32$$
$$X_4 + X_5 \geq 30$$
$$X_5 + X_6 \geq 19$$
$$X_1 + X_6 \geq 15$$

وكذلك الشروط التالية:

$$X_1 \geq 0 \,,\, X_2 \geq 0 \,,\, X_2 \geq 0 \,,\, X_3 \geq 0 \,,\, X_4 \geq 0 \,,\, X_5 \geq 0 \,,\, X_5 \geq 0 \,,\, X_6 \geq 0$$

يتم إدخال المتغيرات y_i حيث أن $\begin{bmatrix} y_i \geq 0 \\ i = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 \end{bmatrix}$ إلى القيود السابقة كما يلي:

$$y_1 = X_1 + X_2 - 30 \geq 0$$
$$y_2 = X_2 + X_3 - 26 \geq 0$$
$$y_3 = X_3 + X_4 - 32 \geq 0$$
$$y_4 = X_4 + X_5 - 30 \geq 0$$
$$y_5 = X_5 + X_6 - 19 \geq 0$$
$$y_6 = X_1 + X_6 - 15 \geq 0$$

إن خطوات حل هذه المشكلة تكون أسهل فيما لو تم تحويل النمـوذج أعـلاه إلى الصيغة المقابلة وذلك كما يلي:

أوجد أعلى قيمة لدالة الهدف التالية:

$$F = 30\ U_1 + 26\ U_2 + 32\ U_3 + 30\ U_4 + 19\ U_5 + 15\ U_5$$

مع تحقق الشروط التالية:

$$\begin{array}{lllllllllll}
U_1 & & & & & & & & +U_6 & \geq & 1 \\
U_1 & + & U_2 & & & & & & & \geq & 1 \\
 & & U_2 & + & U_3 & & & & & \geq & 1 \\
 & & & & U_3 & + & U_4 & & & \geq & 1 \\
 & & & & & & U_4 & + & U_5 & \geq & 1 \\
 & & & & & & & & U_5 + U_6 & \geq & 1
\end{array}$$

وكذلك الشروط التالية:

$$U_1 \geq 0\ ,\ U_2 \geq 0\ ,\ U_2 \geq 0\ ,\ U_3 \geq 0\ ,\ U_4 \geq 0\ ,\ U_5 \geq 0\ ,\ U_5 \geq 0\ ,\ U_6 \geq 0$$

يتم إدخـال متغـيرات جديـدة هـي g_i حيـث أن $\begin{bmatrix} g_i \geq 0 \\ i = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6 \end{bmatrix}$

وذلك كالآتي:

$$\begin{array}{lllllllllllll}
g_1 = & 1(-U_1) & & & & & & & & +1(-U6) & +1 & \geq & 0 \\
g_2 = & 1(-U_1) & + & 1(-U_2) & & & & & & & +1 & \geq & 0 \\
g_3 = & & & 1(-U_2) & + & 1(-U_3) & & & & & +1 & \geq & 0 \\
g_4 = & & & & & 1(-U_3) & + & 1(-U_4) & & & +1 & \geq & 0 \\
g_5 = & & & & & & & 1(-U_4) & + & 1(-U_5) & +1 & \geq & 0 \\
g_6 = & & & & & & & & 1(-U_5) & + 1(-U_6) & +1 & \geq & 0
\end{array}$$

إن النموذج الرياضي بصيغته الأصلية والمقابلة يمكن تقديمه من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (3-5)

	$y_1=$ $-u_1$	$y_2=$ $-u_2$	$y_3=$ $-u_3$	$y_4=$ $-u_4$	$y_5=$ $-u_5$	$y_6=$ $-u_6$	$Z=$ 1
X_1 g_1 =	1	0	0	0	0	1	1
X_2 g_2 =	1	1	0	0	0	0	1
X_3 g_3 =	0	1	1	0	0	0	1
X_4 g_4 =	0	0	1	1	0	0	1
X_5 g_5 =	0	0	0	1	1	0	1
X_6 g_6 =	0	0	0	0	1	1	1
1 F =	-30	-26	-32	-30	-19	-15	0

على أساس الجدول رقم (3-5) ينبغي البحث عن أعلى قيمة لدالة الهدف F[1].

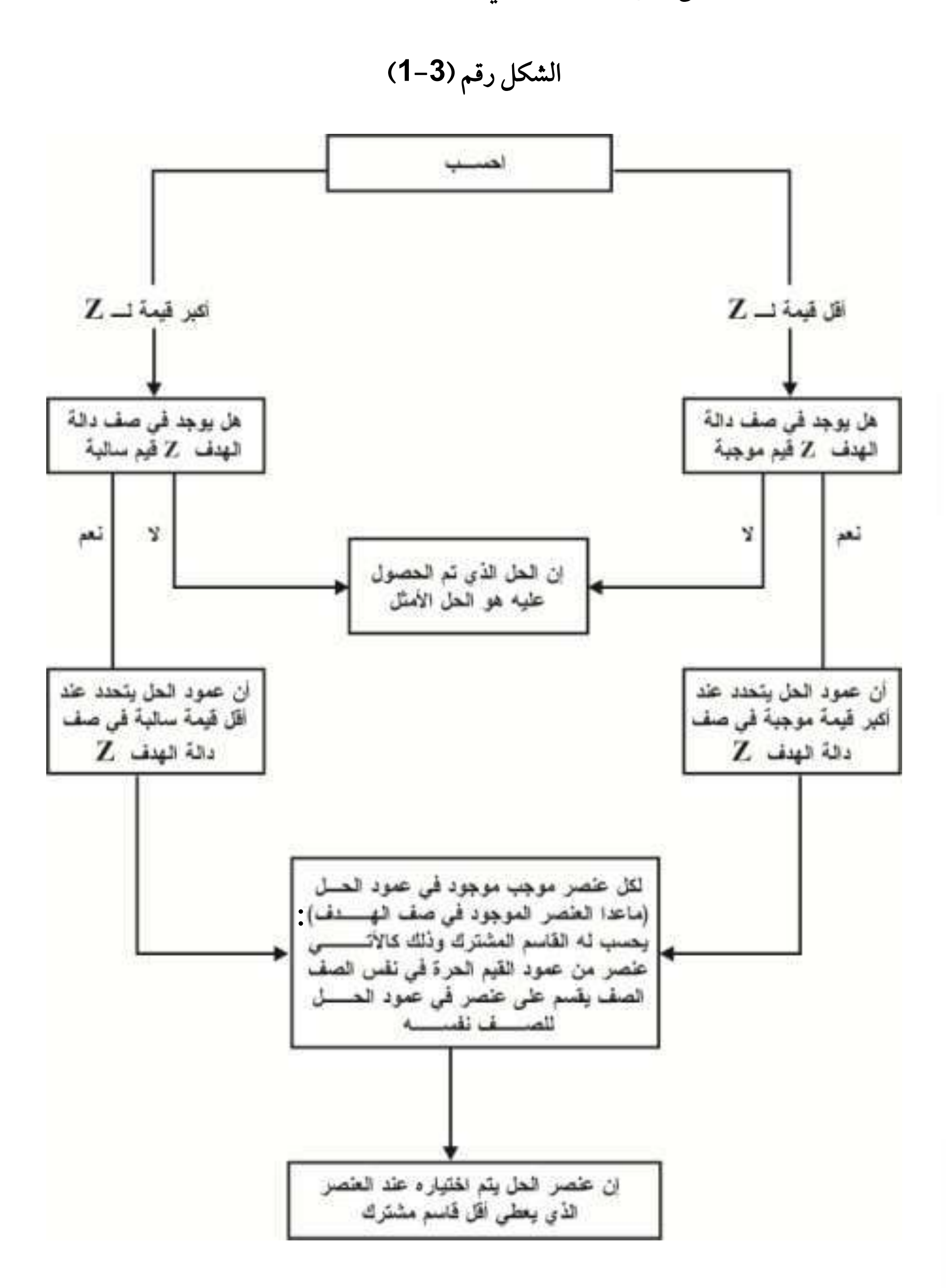
إن الصف الذي يمثل عناصر دالة الهدف يحوي قيم سالبة، لذلك ينبغي تطبيق القاعدة الموضحة في المخطط الانسيابي (3-1). وبموجبه يتضح أن عنصر الحل هو الواقع في نقطة نقاطع العمود الثالث مع الصف الرابع. وتستمر

(1) ننصح القارئ الكريم بالعودة إلى مؤلفنا الموسوم:

نمذجة القرارات الإدارية/ إصدار مؤسسة اليازوري للنشر والتوزيع، عمان، 1999، ص 97، وذلك للتعرف على Jordan Elimination وكيفية تسخيره في تسهيل عملية الحل لهكذا نوع من المشكلات.

العمليات الحسابية على أساس الجـدول (3-5) وبمسـاعدة المخطـط الانسـيابي (3-1) حيث نحصل على الجدول التالي:

الشكل رقم (3-1)



جدول رقم (3-6)

	$y_1=$ $-u_1$	$y_2=$ $-u_2$	$y_3=$ $-u_3$	$y_4=$ $-u_4$	$y_5=$ $-u_5$	$y_6=$ $-u_6$	$Z=$ 1
$X_1\ g_1 =$	1	0	0	0	0	1	1
$X_2\ g_2 =$	1	1	0	0	0	0	1
$X_3\ g_3 =$	0	1	-1	-1	0	0	1
$y_3\ u_3 =$	0	0	1	1	0	0	1
$X_5\ g_5 =$	0	0	0	1	1	0	1
$X_6\ g_6 =$	0	0	0	0	1	1	1
$1\ F =$	-30	-26	32	2	-19	-15	32

إن الجدول رقم (3-6) لا يزال يحوي قيم سالبة في الصف F، لـذلك ينبغـي تبسيط الحل مرة أخرى والتي بموجبها نحصل على الجدول التالي: [1]

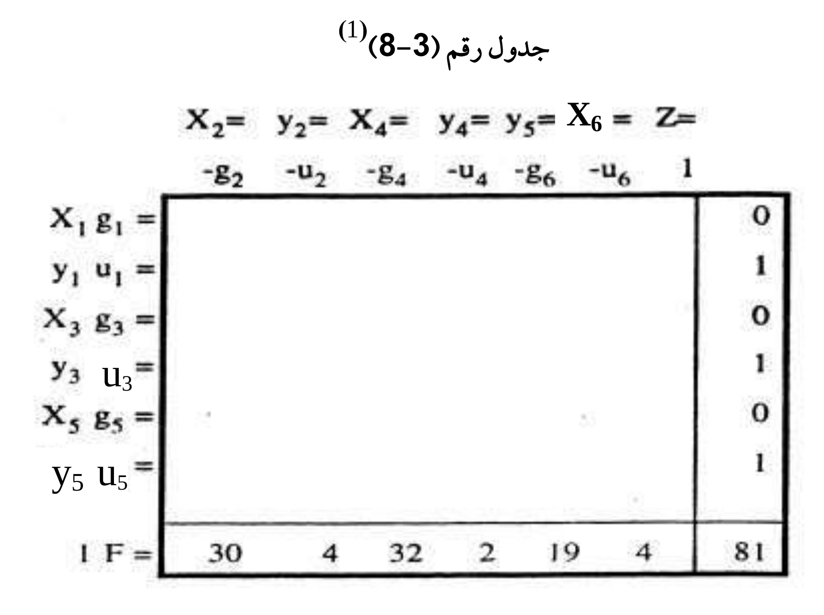
جدول رقم (3-7)

	$X_1=$ $-g_1$	$y_2=$ $-u_2$	$X_4=$ $-g_4$	$y_4=$ $-u_4$	$y_5=$ $-u_5$	$y_6=$ $-u_6$	$Z=$ 1
$X_1\ g_1 =$	-1	-1	0	0	0	1	0
$y_1\ u_1 =$	1	1	0	0	0	0	1
$X_3\ g_3 =$	0	1	-1	-1	0	0	0
$y_3\ u_3 =$	0	0	1	1	0	0	1
$X_5\ g_5 =$	0	0	0	1	1	0	1
$X_6\ g_6 =$	0	0	0	0	1	1	1
$1\ F =$	30	4	32	2	-19	-15	62

(1) إن هذا التبسيط يطلق عليـه (تبسـيط جـوردن (Jordan Elimination)، ويـتم وفـق خطـوات محددة. لمزيد من التفاصيل انظر كتابنا الموسوم: نمذجـة القـرارات الإداريـة/ إصـدار مؤسسـة اليازوري 1999، ص130.

وطالما لا تزال هناك قيم سالبة في الصف F نستمر مرة أخرى في تبسيط الحـل لى أساس الجدول (3-7) وعندها نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (3-8)[1]



	$X_2=$ $-g_2$	$y_2=$ $-u_2$	$X_4=$ $-g_4$	$y_4=$ $-u_4$	$y_5=$ $-g_6$	$X_6=$ $-u_6$	$Z=$ 1
X_1 g_1 =							0
y_1 u_1 =							1
X_3 g_3 =							0
y_3 u_3 =							1
X_5 g_5 =							0
y_5 u_5 =							1
1 F =	30	4	32	2	19	4	81

في الصف الذي يحوي عناصر دالة الهدف F لا توجد قيم سـالبة، عليـه فـإن الحل الذي تم الحصول عليه هو الحل الأمثل. إن قيمة هذا الحل وهو:

$F = 81$

ويلاحظ من تحليل الجداول السابقة إن قـيم دالـة الهـدف F كانـت في حالـة تزايد، أي.

$$F = 0 \longrightarrow 32 \longrightarrow 62 \longrightarrow 81$$

---

(1) لم تكتب القيم في داخل الجدول لعدم الحاجة لها في عرض النتائج النهائية.

عند فرز البيانات التي تم الحصول عليها من الجدول (3-8) بموجب النموذج المقابل، فإن ذلك يتطلب مساواة قيم المتغيرات الموجودة فوق الجدول مباشرة إلى الصفر.

أما القيم في جانب الجدول مباشرة فإنها تأخذ القيم المقابلة لها الموجودة في عمود القيم الحرة، أي أن:

$$g_2 = 0, u_2 = 0, g_4 = 0, u_4 = 0, g_6 = 0, u_6 = 0$$
$$g_1 = 0, u_1 = 1, g_3 = 0, u_3 = 1, g_5 = 0, u_5 = 1$$

المتغيرات الواردة في الخط الثاني من يسار الجدول فإنه يتم مساواتها إلى الصفر. أما القيم الموجودة فوق الجدول (في الصف الثاني منه) فإنها تأخذ القيم الموجودة في صف القيم الذي فيه قيم F، أي أن:

$$X_1 = 0, y_1 = 1, X_3 = 0, y_3 = 1, X_5 = 0, y_6 = 1$$
$$X_2 = 30, y_2 = 4, X_4 = 32, y_4 = 2, X_6 = 19, y_6 = 4$$

إن أقل قيمة لدالة الهدف Z تبلغ 81 استناداً إلى النظرية رقم (1):

$$Z_{\max} = F_{\min}$$

و

$$Z_{\min} = F_{\max}$$

فهو يعني أقل عدد ممكن في العمال ينبغي تشغيلهم هو 81 عامل، أما بالنسبة لخطة تشغيل العمال فإنها تكون كما يلي:

1- في الساعة 1 يكون عدد العمال X_1 المطلوب تبديلهم = 0 عامل.

2- في الساعة 5 يكون عدد العمال X_2 المطلوب تبديلهم = 30 عامل.

3- في الساعة 9 يكون عدد العمال X_3 المطلوب تبديلهم = 0 عامل.

4- في الساعة 13 يكون عدد العمال X_4 المطلوب تبديلهم = 32 عامل.

5- في الساعة 17 يكون عدد العمال X_5 المطلوب تبديلهم = 0 عامل.

6- في الساعة 21 يكون عدد العمال X_6 المطلوب تبديلهم = 19 عامل.

ويكون لدى إدارة الأفراد عدد من العمال كاحتياط وذلك كما يلي:

1- في الساعة 1 يكون عدد العمال y_1 الاحتياط ينبغي تبديلهم = 0 عامل.

2- في الساعة 5 يكون عدد العمال y_2 الاحتياط ينبغي تبديلهم = 4 عامل.

3- في الساعة 9 يكون عدد العمال y_3 الاحتياط ينبغي تبديلهم = 0 عامل.

4- في الساعة 13 يكون عدد العمال y_4 الاحتياط ينبغي تبديلهم = 2 عامل.

5- في الساعة 17 يكون عدد العمال y_5 الاحتياط ينبغي تبديلهم = 0 عامل.

6- في الساعة 21 يكون عدد العمال y_6 الاحتياط ينبغي تبديلهم = 4 عامل.

مشكلة رقم (2): منظمة أعمال صناعية تملك ثلاثة خطوط إنتاجية، على أساسها يتم إنتاج أربعة أنواع من المنتجات، هي: A, B, C, D. إن ساعات التشغيل القصوى المتاحة لكل خط من الخطوط الإنتاجية، مقدار ساعات العمل المطلوبة لكل 1000 وحدة من كل نوع من المنتجات على أي خط من الخطوط الإنتاجية وربح الوحدة الواحدة المتوقع موضح في الجدول التالي:

جدول رقم (3-9) بيانات المشكلة

الخطوط الإنتاجية	ساعات العمل المطلوب لكل 1000 وحدة من المنتجات ساعة / ماكنة				ساعات التشغيل القصوى المتاحة ساعة/ ماكنة
	A	B	C	D	
الخط الإنتاجي الأول	2	3	4	1	87000
الخط الإنتاجي الثاني	1	1	5	2	55000
الخط الإنتاجي الثالث	3	1	2	1	61000
	17	9	20	8	الربح المتوقع

المطلوب:

أ- وضع خطة الإنتاج التي تؤدي إلى تحقيق أقصى عائد ربح ممكن.

ب- صياغة النموذج المقابل للنموذج الأصلي للمشكلة وحله.

الحل: نفرض أن X هو رمز لكمية الإنتاج، لذلك يكون لدينا:

$X_1 \leftarrow$ كمية الإنتاج من A.

$X_2 \leftarrow$ كمية الإنتاج من B.

$X_3 \leftarrow$ كمية الإنتاج من C.

$X_4 \leftarrow$ كمية الإنتاج من D.

إن المطلوب هو تحديد قيمة المتغيرات الأساسية X_1 , X_2 , X_3 , X_4 التي تجعل قيمة دالة الهدف أعلى ما يمكن أي:

$$Z = 17X_1 + 9X_2 + 20X_3 + 8X_4 \longrightarrow Max$$

وذلك في ظل الشروط التالية:

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + 1X_4 \leq 87000$$
$$1X_1 + 1X_2 + 5X_3 + 2X_4 \leq 55000$$
$$3X_1 + 1X_2 + 2X_3 + 1X_4 \leq 61000$$

وكذلك الشروط المنطقية

$X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0 , X_3 \geq 0 , X_4 \geq 0$

إن حل هذا النموذج يؤدي إلى تحديد الخطة المثلى للإنتاج والتي هي[1]:

كمية الإنتاج من A : $X_1 \leftarrow 12000$ وحدة

كمية الإنتاج من B : $X_2 \leftarrow 13000$ وحدة

كمية الإنتاج من C : $X_4 \leftarrow 6000$ وحدة

كمية الإنتاج من D : $X_4 \leftarrow 0$

إذا تم اتخاذ القرار باعتماد هذه الخطة، فإن في ظل الخطة سوف تكون الأرباح لقصوى 441000 دينار.

إن النموذج المقابل يتم صياغته على أساس أن المطلوب هو:

---

(1) بإمكان القارئ التأكد من صحة النتائج على أساس النموذج الرياضي للمشكلة بالعودة إلى ما يعرف بـ Jordan Elimination. للمزيد من التفاصيل حول هذا الأسلوب ننصح القارئ الكريم بالعودة إلى مؤلفنا الموسوم:

نمذجة القرارات الإدارية / إصدار مؤسسة اليازوري للنشر والتوزيع، عمان، 1999، ص97.

تحديد قيم للمؤشرات u_3 , u_2 , u_1 التي تمثل كفاءة الخطوط الإنتاجية في تحقيق الإيرادات للمنظمة وذلك في ظل تحقق الشروط التالية:

$$2u_1 + u_2 + 3u_1 \geq 17$$
$$3u_1 + u_2 + u_3 \geq 9$$
$$4u_1 + 5u_2 + 2u_3 \geq 20$$
$$u_1 + 2u_2 + u_1 \geq 8$$

وكذلك الشروط المنطقية

$$u_1 \geq 0 , u_2 \geq 0 , u_3 \geq 0$$

ويجعل من قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن، أي:

$$F = 87u_1 + 55u_2 + 61u_3 \longrightarrow Min$$

إن حل هذه المشكلة يؤدي إلى الحصول على النتائج التالية:

$$u_1 = \frac{26}{25} , u_2 = \frac{34}{25}, u_3 = \frac{113}{25}$$

بموجب هذه النتائج يعني، إن إدارة الإنتاج في منظمة الأعمال المذكورة، إذا قررت اعتماد خطة الإنتاج الواردة أعلاه، فإن مقابل كل 1000 ساعة عمل تشتغل فيها الخطوط الإنتاجية الثلاث يتم بلوغ مستويات كفاءة في تحقيق الإيرادات كما يلي:

بالنسبة للخط الإنتاجي الأول $\frac{26}{25}$ دينار

بالنسبة للخط الإنتاجي الثاني $\frac{34}{25}$ دينار

بالنسبة للخط الإنتاجي الثالث $\frac{113}{25}$ دينار

من مصلحة متخذ القرار في المنظمة زيادة وقت تشغيل الخط الإنتاجي الثالث لكونه يحقق أكبر نسبة من الإيرادات، وفي ظل هـذه المـؤشرات تكـون تكـاليف تشغيل الخطوط الإنتاجية الثلاث كما يلي:

$$F_{\min} = 87000 \cdot \frac{26}{25} + 55000 \cdot \frac{34}{25} + 61000 \cdot \frac{113}{25}$$

$$F_{\min} = 441000$$ ديناراً

2.3. النموذج الرياضي الذي تكون فيه دالة الهدف (Z) هي دالة لمتغير آخر في النموذج

في الواقـع العمـلي يمكـن أن يواجـه متخـذ القـرار في مـنظمات الأعـمال (وبالذات الإنتاجية) منها مشاكل تتسم بطابع التغير في وحدة الزمن – حيث قد تظهر هذه المشاكل على مستوى المنظمة بشكل عام، أو في كل وظيفة من وظائفها الخمس المعروفة (الإنتاج التسويق، المالية ، الأفراد، المخازن). وعلى أساس ذلك فإن اتخاذ القرار الأمثل يتطلب صياغة النموذج الرياضي بما يتلائم وصفة التغـير المذكورة. وبعبارة أخرى يجري تحوير أحد مكونات النمـوذج الريـاضي للبرمجـة الخطية (دالة الهدف، القيود الأساسـية، قيـد اللاسـلبية، المتغـيرات والعوامـل) بالشكل الذي يستوعب صفة التغيير المشار إليها. لتوضـيح هـذه الفكـرة نـذكر أدناه الصيغة العامة لمعادلة دالة الهدف، التي هي:

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2 + ... + C_1 X_1 + \longrightarrow Max\ or\ Min$$

إن هذه الصيغة يمكن كتابتها بشكل مختصر وذلك على افتراض أن المطلـوب هو تعظيم دالة الهدف:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} C_j \; X_j \longrightarrow Max$$

على افتراض : $C_j \longrightarrow$ هو مقدار الربح المتوقع من بيع الوحدة الواحدة من المنتوج.

فإذا كان يرتبط بحجم الإنتاج، أي أن زيادة الأرباح تعتمد على زيادة حجم الإنتاج وبالعكس، فإن التحوير المطلوب القيام به في صيغة دالة الهدف هو كما يلي:

$$Z=\sum_{j=1}^{n} Q_i \; (X_j) \, X_j \longrightarrow Max$$

حيث أن:

حجم الإنتاج (حيث أن: n ,.... , 2 , 1 = i)

$Q_j \longrightarrow$ دالة حجم الإنتاج الخطية (حيث أن: n ,.... , 2 , 1 = j) يتضح بأن دالة الهدف Z هي دالة لمتغير آخر ألا وهو حجم الإنتاج الذي يرتبط مع ربح الوحدة الواحدة بدالة فرعية، أي أن:

$C_j = Q_j \; (X_j)$

ولتوضيح فكرة النموذج الرياضي المذكور أعلاه ندرج أدناه أمثلة تعبر عن تطبيقات في وظائف منظمة الأعمال المختلفة.

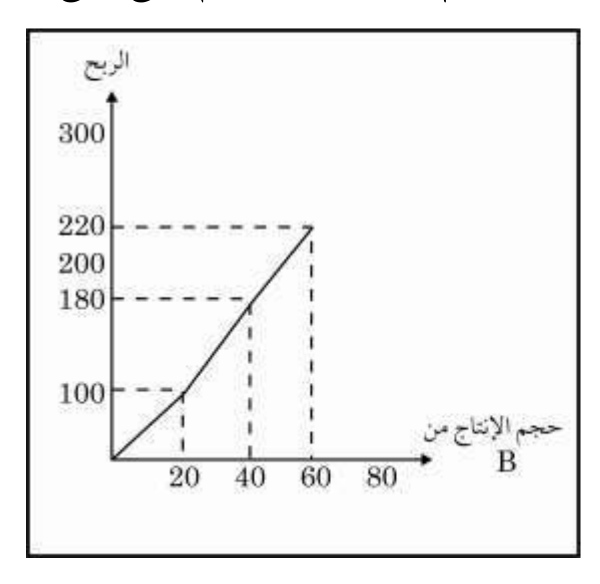
مشكلة رقم (1): منظمة أعمال إنتاجية معينة متخصصة بإنتاج نوعين من المنتجات A و B ولغرض صناعة هذه المنتجات يتطلب الأمر استخدام ثلاث أنواع من مستلزمات الإنتاج الأساسية (مواد أولية ساعات عمل، طاقة كهربائية) البيانات المتعلقة بهذه المشكلة تتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (3-10) بيانات المشكلة

مستلزمات الإنتاج الأساسية	المنتجات		المتوفرة من مستلزمات الإنتاج الأساسية
	A	B	
المواد الأولية	1	2	115
ساعات العمل	2	1	80
الطاقة الكهربائية	0	1	60

إن الربح المتوقع من بيع المنتج A ثابت وهو 4 دينار أما بالنسبة للمنتج B، فإن الربح المتوقع من البيع يعتمد على حجم الإنتاج من المنتج نفسه. إن علاقة الربح بحجم الإنتاج المتحقق من المنتج B يتضح من خلال الشكل البياني التالي:

الشكل رقم (3-2) العلاقة بين حجم الإنتاج والربح



المطلوب : إعداد خطة إنتاج مثلى، مع اعتماد الربح المتحقق كمؤشر للأمثلية.

الحل: نفرض أن X هو الرمز المعبر عن حجم الإنتاج.

عليه فإن: $X_i \leftarrow$ حجم الإنتاج من المنتج A.

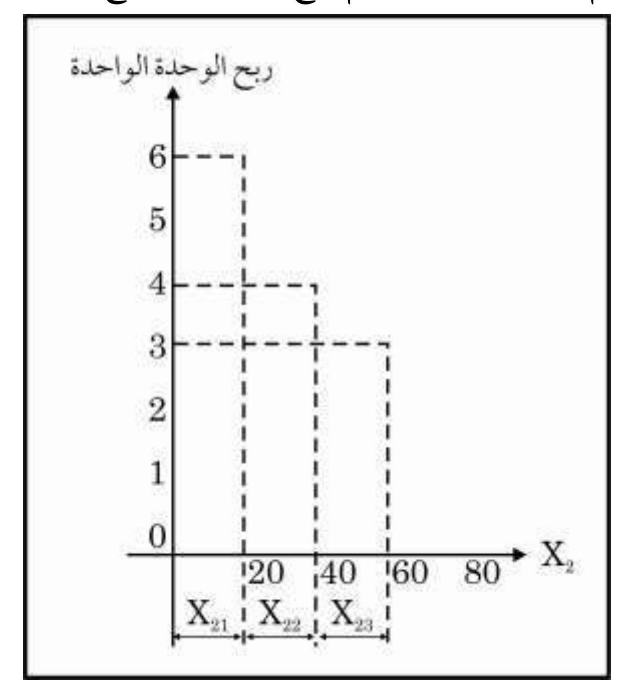
$X_2 \leftarrow$ حجم الإنتاج من المنتج B.

على أساس البيانات المذكورة في الجدول (3-10) نحصل على النموذج الرياضي التالي:

$$X_1 + 2X_2 \leq 115$$
$$2X_1 + X_2 \leq 80$$
$$X_2 \leq 60$$
$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$$

من الشكل البياني (3-2) يمكن أن نستنتج طبيعة العلاقة بين ربح الوحدة الواحدة وبين حجم الإنتاج المعبر عنه بالرمز X_2، إن هذه العلاقة يمكن عرضها من خلال الشكل البياني التالي:

شكل رقم (3-3) العلاقة بين حجم إنتاج أحد المنتجات وربح الوحدة الواحدة



من أجل توضيح فكرة العلاقة بين الـربح وحجـم الإنتـاج نأخـذ المتغـيرات X_{21} , X_{22} , X_{23} حيث أن:

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + X_{23}$$
$$X_{21} \leq 20 \,.\, X_{22} \leq 20 \,,\, X23 \leq 20$$

إن دالة الهدف التي ينبغي تعظيمها، يمكن صياغتها كما يلي:

$$Z = 4X_1 + X_2$$

وبالتعويض عن قيمة X_2 من أعلاه نحصل على ما يلي:

$$Z = 4\,X_1 + 5X_{21} + 4X_{22} + 3X_{23}$$

في ظل تحقق الشروط التالية:

$$X_1 + 2\,(X_{21} + X_{22} + X_{23}) \leq 115$$
$$X_12 + (X_{21} + X_{22} + X_{23}) \leq 80$$
$$(X_{21} + X_{22} + X_{23}) \leq 60$$
$$X_{21} \leq 20$$
$$X_{22} \leq 20$$
$$X_{23} \leq 20$$

وبعد التبسيط نحصل على ما يلي:

$$X_1 + 2X_{21} + X_{22}2 + 2X_{23} \leq 115$$
$$X_12 + X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 80$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} \leq 60$$
$$X_{21} \leq 20$$
$$X_{22} \leq 20$$
$$X_{23} \leq 20$$

حيث أن: $X_1 \geq 0 , X_{21} \geq 0 , X_{22} \geq 0 , X_{23} \geq 0$

وبعد إدخال المتغيرات $y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , y_5$ التي تمثل المتغيرات الراكدة نحصل على ما يلي:

$$y_1 = 1\ (-X_1) + 2\ (-X_{21}) + 2\ (-X_{22}) + 2\ (-X_{23}) + 115 \geq 0$$

$$y_2 = 2\ (-X_1) + 1\ (-X_{21}) + 1\ (-X_{22}) + 1\ (-X_{23}) + 80 \geq 0$$

$$y_3 = 1\ (-X_{21}) + 1\ (-X_{22}) + 1\ (-X_{23}) + 60 \geq 0$$

$$y_4 = 1\ (-X_{21}) + 20 \geq 0$$

$$y_5 = 1\ (-X_{22}) + 20 \geq 0$$

ويمكن عرض مفردات هذا النموذج من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (3-11)

	$-X_1$	$-X_2$	$-X_{22}$	$-X_{23}$	1
$y_1=$	1	2	2	2	115
$y_2=$	2	1	1	1	80
$y_3=$	0	1	1	1	60
$y_4=$	0	1	0	0	20
$y_5=$	0	0	1	0	20
$Z_1=$	-4	-5	-4	-3	0

على أساس الجدول رقم (3-11) يتم البحث عن الحل الأمثل علماً بأنه يمكن إهمال الشرط: $X_{22} \leq 20$.

حيث أن الشرط المذكور متحقق ضمناً في ظل وجود الشروط التالية:

$X_{21} + X_{22} + 9X_{23} \leq 60$

$X_{21} \leq 60$

$X_{22} \leq 60$

ونحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (3-12)

	$-y_2$	$-y_4$	$-y_5$	$-y_1$	1
$X_{23}=$	$-\frac{1}{3}$	-1	-1	$\frac{2}{3}$	10
$X_1=$	$\frac{2}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	15
$y_3=$	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{2}{3}$	15
$X_{21}=$	0	1	0	0	20
$X_{22}=$	0	0	1	0	20
$Z_1=$	$\frac{5}{3}$	2	1	$\frac{2}{3}$	270

في الصف الخاص بعناصر دالة الهدف Z لا توجد قيم سالبة، وطبقاً للمخطط الانسيابي الموضح في الشكل رقم (3-1) يعتبر الحل الذي تم الحصول عليه هـو الأمثل، والذي هو كالآتي:

$X_1 \longrightarrow 15$ $\quad y_1 \longrightarrow 0$

$X_{21} \longrightarrow 20$ $\quad y_2 \longrightarrow 0$

$X_{22} \longrightarrow 20$ $\quad y_3 \longrightarrow 10$

$X_{23} \longrightarrow 10$ $\quad y_4 \longrightarrow 0$

$y_5 \longrightarrow 0$

أي أن: $X_2 = X_{21} + X_{22} + X_{23} = 50$

أما قيمة دالة الهدف Z فهي تساوي 270 وحدة نقدية.

ومما تقدم يمكن نستنتج بأن المنظمة قيد الدرس إذا أرادت الحصول على 270 وحدة نقدية كأرباح فإن ذلك يتطلب إنتاج 15 وحدة من المنتج A و 50 وحدة من المنتجB.

مشكلة رقم (2): إحدى منظمات الأعمال المتخصصة بتربية وتسمين الأبقار ترغب في رفع مستوى القيمة الغذائية للأعلاف التي تحصل عليها من المصانع الأخرى. حيث تشترط المنظمة توفر ثلاث عناصر أساسية وهي C.B.A. وفي كل شهر ينبغي أن يكون مجموع ما يحصل عليه الحيوان الواحدة من العنصر A هو 600 كيلو غرام، ومن العنصر الثاني 1000 كيلو غرام ومن العنصر الثالث 400 كيلو غرام.

حصلت إدارة المشتريات والتسويق في المنظمة المذكورة على عرض لشراء نوعين من الأعلاف هي N, M التي يدخل في تركيبها العناصر الأساسية الثلاث. حيث أن الوحدة الواحدة من العلف M يحوي مقادير معينة من العناصر المذكورة، وهي:2 كيلو غرام من العنصر A3, كيلو غرام من العنصر B ولا تحتوي على العنصر C. في حين أن الوحدة الواحدة من المنتج N تحوي:

(1) كيلو غرام من العنصر A.

(2) كيلو غرام من العنصر B.

(3) كيلو غرام من العنصر C.

إن الوحدة الواحدة من العلف N تكلف المصنع 4 وحدة نقدية، في حين أن التكاليف إنتاج العلف M ليست ثابتة. حيث أنها تزداد إذا زادت الكمية المطلوبة من قبل المنظمة. إذ أن ذلك يستلزم جمع الكميات الإضافية المطلوبة من مراكز تجميع وخزن أخرى متمركزة في مواقع جغرافية متباينة البعد عن موقع المصنع الرئيسي. ويترتب على هذا بالنتيجة زيادة كلفة شراء الوحدة الواحدة من العلف M بالنسبة للمنظمة[1].

إن تكاليف شراء العلف M (بما في ذلك تكاليف تسويقها إلى المنظمة) التي تعتمد على حجم الكمية التي ينبغي شرائها من قبل المنظمة تتضح من خلال الشكل البياني التالي:

الشكل رقم (3-4) العلاقة بين حجم المشتريات وتكاليف شراء الوحدة الواحدة

تكاليف شراء الوحدة الواحدة من M
3200
2200
600
0
100
200
300
400
حجم المشتريات من العلف M

(1) على افتراض عدم وجود مصدر آخر لشراء نفس العلف بكلفة أقل.

المطلوب: تحديد مقدار الكمية المثلى من العلف M و N ينبغي على إدارة المشتريات والتسويق في المنظمة المذكورة شرائها بحيث تكون تكاليف الشراء الكلية أقل ما يمكن[1]:

الحل: نفرض أن X هو رمز لحجم الكمية من الأعلاف الواجب شرائها، عليه فإن:

حجم الكمية الواجب شرائها من العلف M ⟵ X_1

حجم الكمية الواجب شرائها من العلق N ⟵ X_2

جدول رقم (3-13) بيانات المشكلة

مجموع ما ينبغي أن يحصل عليه الحيوان خلال الشهر من العناصر الأساسية للعلف	نوع العلف		العناصر الأساسية للعلف
	N	M	
600 كيلو غرام	1	2	A
1000 كيلو غرام	2	3	B
400 كيلو غرام	2	0	C

على أساس الجدول أعلاه يتم صياغة النموذج الرياضي للمشكلة وكما يلي:

1- القيود الأساسية.

$X_1 + X_2 \geq 6002$ قيمة العنصر A

(1) إن مؤشر الأمثلية في هذه الحالة هو تكاليف الشراء الكلية (لكلفة المنتج زائداً تكاليف تسويقه إلى مخازن المنظمة) التي ينبغي أن تكون أقل ما يمكن.

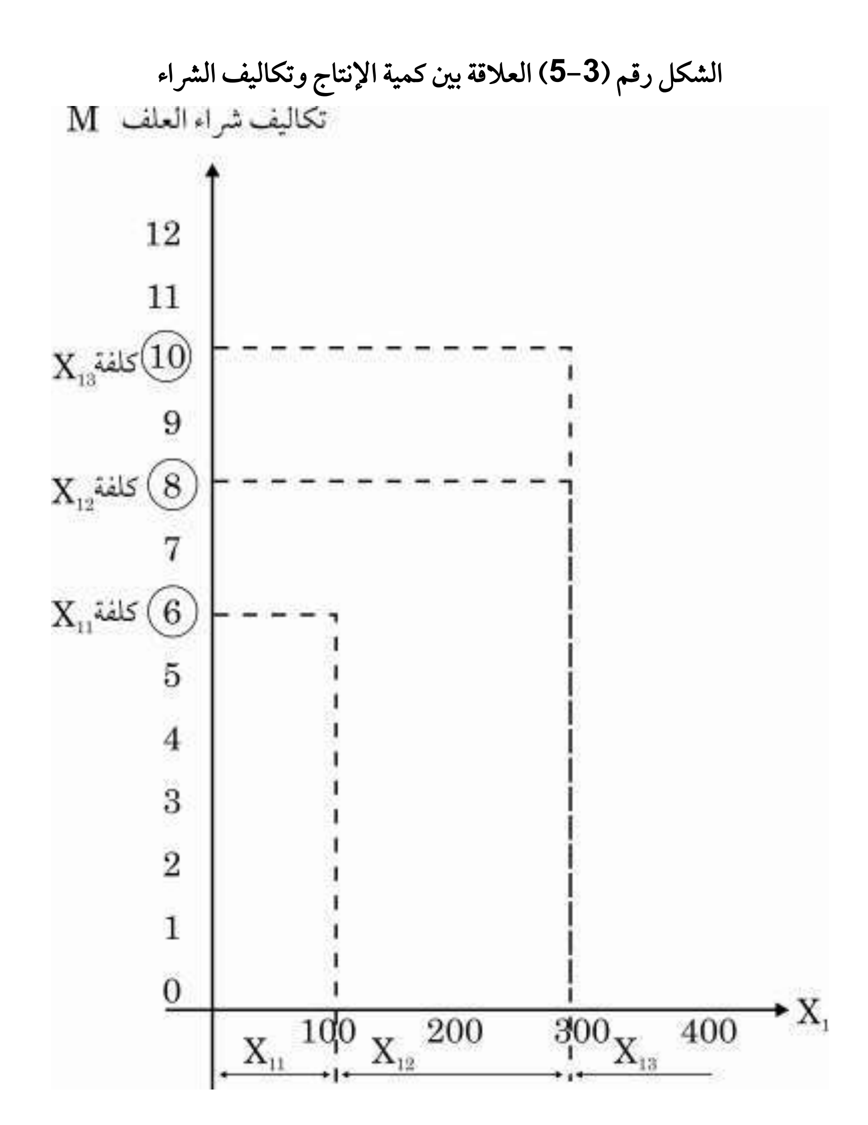
قيمة العنصر B $X_1 + 2X_2 \geq 10003$

قيمة العنصر C $X_2 \geq 400$ 2

2- القيود الاسلبية $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

أما بالنسبة لدالة الهدف Z فإن تحديد صيغتها يتم في ضوء المؤشرات المستمدة من الشكل البياني (3-4) وكذلك الشكل البياني التالي:

الشكل رقم (3-5) العلاقة بين كمية الإنتاج وتكاليف الشراء



إن توضيح طبيعة العلاقة الواقعة بين تكاليف شراء الوحدة الواحدة من العلف M على حجم الكمية المشتراه X_1 يتطلب افتراض متغيرات جديدة، هي:

X_{11} , X_{12} , X_{13} علماً بأن هذه المتغيرات هي أجزاء للمتغير X_1 حيث أن:

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + X_{13}$$
$$\leq X_{11} \leq 1000$$
$$\leq X_{12} \leq 1000$$

واستناداً إلى ما تقدم فإن صيغة دالة الهدف هي:

$$Z = 6X_{11} + 8X_{12} + 10X_{13} + 4X_2$$

ويمكن إعادة صياغة الشروط الأساسية للمشكلة لتصبح كما يلي:

$$X_{11}2 + 2X_{12} + X_{13}2 + X_2 \leq 600$$
$$X_{11}3 + 3X_{12} + X_{13}3 + X_22 \leq 1000$$
$$X_22 \leq 400$$
$$X_{11} \leq 100$$
$$X_{12} \leq 200$$

الشروط المنطقية هي: $X_{11} \geq 0$, $X_{12} \geq 0$, X_{13} , $X_2 \geq 0$

عند تطبيق أحد طرق الحل في البرمجة الخطية (السمبلكس) وذلك من أجل حل هذه المشكلة يؤدي ذلك في النهاية إلى الحصول على الحل الأمثل التالي:

$$X_{11} = 100$$
$$X_{12} = 100$$
$$X_{13} = 0$$
$$X_2 = 200$$
$$X_1 = X_{11} + X_{12} + X_{13} = 200$$

وفي ظل هذه النتائج تكون أقل قيمة لدالة الهدف كما يلي:

$Z = 6.\ 100 + 8.\ 100 + 10.0 + 4\ .\ 200 = 2200$ وحدة نقدية

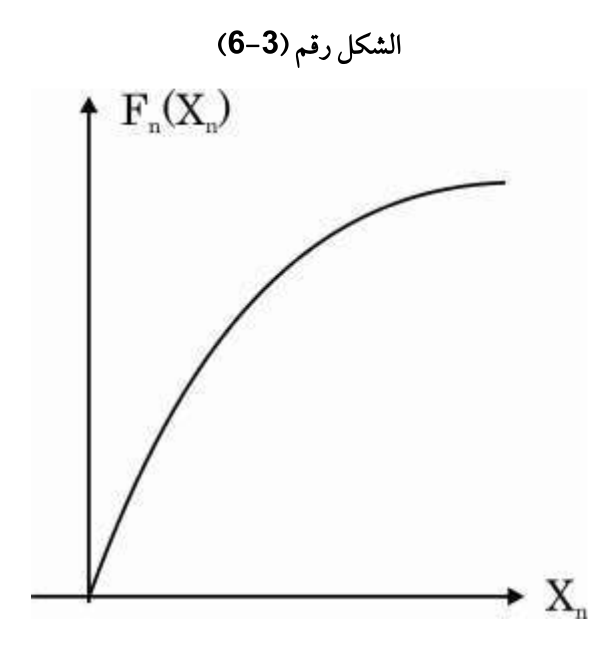
أي أن المنظمة تتحمل أقل كلفة شراء كمية ممكنة وهي 2200 وحدة نقدية فيما لو اتخذت قراراً بشراء 200 وحدة من العلف M200 , وحدة من العلف N.

مشكلة رقم (3): مجموعة من منظمات الأعمال المتخصصة بإنتاج أنواع متشابه من المنتجات ترتبط بمؤسسة واحدة. إن إدارة المؤسسة المسؤولة عن التوجيه والإشراف على أعمال n من هذه المنظمات قررت تحديد علاقة معينة بين تكاليف الإنتاج وحجم الإنتاج ينبغي الالتزام بها. إن هذه العلاقة تتضح من خلال الدالة التالية:

$F_n\ (X_n)\ (n = 1\ , 2\ ,\ ...,\ N)$

إن هذه الدالة يمكن عرضها من خلال الشكل البياني التالي:

الشكل رقم (3-6)



إن كل وحدة منتوج يجري تكوينها في المنظمة n يصرف عليها a_n وحدة من المواد الأولية. يبلغ مجموع ما هو متوفر من مخزون المواد الأولية بالنسبة لـ n في المنظمات ما مقداره A_n وحدة. في كل سنة المنظمة n ليس باستطاعتها إنتاج أكثر من dn وحدة. ولأسباب تعود إلى التزامات مع الوكلاء المتعاقدين مع هذه المنظمات لا يجوز أن يصل حجم الإنتاج السنوي عن أقل من C_n وحدة، وقد تم الاتفاق مع إدارة المؤسسة على أن حجم إنتاج المنظمة n يبلغ على الأقل b_n.

المطلوب: تحديد حجم الإنتاج الأمثل لكل منظمة مع اعتماد تكاليف الإنتاج السنوية لكافة المنظمات المرتبطة بالمؤسسة كمؤشر للأمثلية.

الحل: نفرض أن X_n (حيث أن: $n = 1 , 2 , ... , N$) حجم الإنتاج السنوي للمنظمة n. ويمثل هذا الرمز المتغير الأساسي في نموذج المشكلة الذي ينبغي أن يحقق الشرط التالي:

$$C_n \leq X_n \leq d_n$$

حيث أن: $n = (1 , 2 , .., N)$

إن الاستهلاك السنوي للمواد الأولية في المنظمة n في ظل حجم الإنتاج X_n يبلغ $X_n \ \ a_n$ وحدة، إن أية منظمة تملك مقدار معين من مخزون المواد الأولية لذلك ينبغي أن يتحقق الشرط التالي:

$$a_n \ Xn \leq A_n \qquad (n = 1 , 2 , ..., N)$$

إن مجموع حجم الإنتاج السنوي لكافة المنظمات يبلغ

$$X_1 + X_2 + ... + X_N = \sum_{n=1}^{N} X_n \quad \text{وحدة}$$

وينبغي أن لا يكون حجم الإنتاج أقل من المقدار *bn* ، أي أن:

$$\sum_{n=1}^{N} X_n \geq b_n$$

إن مجموع تكاليف الإنتاج السنوية لكافة المنظمات تبلغ:

$$K_1 = F_1(X_1) + F_2(X_2) + ... + F_n(X_N) = \sum_{n=1}^{N} F_n(X_n)$$

وحدة نقدية

إن النموذج الرياضي أعلاه يمكن صياغته بشكل عام كما يلي:

المطلوب: تحديد قيم المتغيرات الأساسية $X_1, X_2, ..., X_n$

التي تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{n=1}^{N} X_n \geq b_n$$

$$a_n \ X_n \leq A_n \qquad (n = 1, 2, ...N)$$

$$C_n \leq X_n \leq d_n \qquad (n = 1, 2, ...N)$$

وتجعل من قيمة دالة الهدف أعلى ما يمكن، أي:

$$K = \sum_{n=1}^{N} F_n \ (X_n) \longrightarrow Min$$

إن حل هذه المشكلة باستخدام إحدى الطرق المعتمدة في البرمجة الخطية يتطلب توضيح لطبيعة دالة الهدف بيانياً للتعرف على سلوك هذه الدالة بالمقارنة مع حجم الإنتاج، حيث أن الدالة $F_n(X_n)$ الواقعة في المجال (C_n, d_n) يمكن التعبير عنها بمعادلة وكما يلي:

$$F'_n\ (X_n) = F_n (C_n) + F'_n\ (X_n)\ (X_n - C_n) \quad (n=1,2,....N)$$

علماً بأن المشتقة $F_n (X_n)$ تم حسابها طبقاً لنظرية Lagranga وذلك كما يلي[1]:

$$F'_n\ (X_n) = \frac{F_n (d_n) - F_n (C_n)}{d_n - C_n} \qquad (n=1,2,....N)$$

بموجب هذه المشتقة يجري تحوير المنحنى باتجاه الاستقامة، وبعبارة أخرى اقتباس جزء من المنحنى وتحويله إلى مستقيم كما هو واضح في الشكل البياني رقم (3-7) التالي:

الشكل رقم (3-7) تحوير المنحنى باتجاه الاستقامة

(1) المصطلح Lagrang'a هو اسم العالم الرياضي المتخصص في مجال الرياضيات وبالذات الدوال والمشتقات انظر:

H. KRINSKI, A BADACH. op. cit , pp.. 122

إن الدالة $F_n (X_n)$ في المجال (C_n , y_n) تم التعبير عنها بمستقيم بدل المنحنـى، لذلك فإن:

$F_n (X_n) =$ مقدار ثابت $(n = 1 , 2,\ldots, N)$

وذلك لكافة القيم المعبر عنها بالعلامة الرياضية التالية:

$)n = 1 , 2, \ldots, N(C_n \leq X_n \leq d_n$

واستناداً إلى ما تقدم تكون التكاليف الكلية السنوية لكافة المنظمات كما يلي:

$$K_1 = \sum_{n=1}^{N} [F_n (C_n) + F'_n (X_n) (X_n - C_n)]$$

$$K_1 = \sum_{n=1}^{N} F_n (C_n) + \sum_{n=1}^{N} X_n F'_n (X_n) - \sum_{n=1}^{N} C_n F'_n (X_n)$$

$$K_1 = \sum_{n=1}^{N} X_n F'_n (X_n) \sum_{n=1`}^{N} [F_n (C_n) - C_n F'_n (X_n)]$$

إن مكونات العلاقة الرياضـية K_1 لا تعتمـد عـلى حجـم الإنتـاج X_n وعليـه نفترض ما يلي:

$$g = \sum_{n=1}^{N} [F_n (C_n) - C_n F'_n (X)] =$$ قيمة ثابتة

ومنه:

$$K_n = F'_n (X)$$

ويمكن حساب مجموع التكاليف من خلال العلاقة الرياضية التالية:

$$K_1 = \sum_{n=1}^{N} K_n \, X_n \; + \; g$$

وبالاستناد إلى ما تم التوصل إليه من عملية تحوير للمنحنى المعبر عن الدالة $F_n\,(X_n)$ باتجاه الاستقامة، يمكن إعادة صياغة النموذج الرياضي أعلاه لاستخدامه في اتخاذ القرار القريب من حالة الأمثلية Suboptimal وذلك كما يلي:

المطلوب: تحديد قيم المتغيرات الأساسية $X_1 , X_2 , \ldots.., X_n$

التي تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{n=1}^{N} X_n \geq b_n$$

$$a_n \;\; X_n \leq A_n \qquad\qquad (n=1, 2, \ldots.N)$$

$$C_n \;\leq\; X_n \leq d_n \qquad\qquad (n=1, 2, \ldots.N)$$

وتجعل من قيمة دالة الهدف أعلى ما يمكن، أي:

$$K_2 = \sum_{n=1}^{N} k_n \;\; X_n \longrightarrow Min$$

3.3. النموذج الرياضي لاتخاذ القرار الأمثل عندما تكون قيم المتغيرات الأساسية أعداداً صحيحة Integer:

إن بعض المشاكل في الواقع العملي التي يتم معالجتها باستخدام أحد النماذج الرياضية، الذي ينبغي أن تكون قيم متغيراته الأساسية أعداداً صحيحة خالية من الكسور، إذ أن الكسور لا تعني شيء بالنسبة لمتخذ القرار عندما تكون

متغيرات المشكلة في الواقع العملي غير قابلة للتجزئة. على سبيل المثال عندما يتعلق الأمر باتخاذ قراراً حول التوزيع الأمثل لمهام الإنتاج حسب الفروع الصناعية لتكوين أنواع معينة من المنتجات مثل السيارات التلفزيونات، الثلاجات وما إلى ذلك، في هذا النوع من المهمات الإنتاجية ليست للكسور أية معاني تذكر، وقد لا يمكن قبول الكسور مطلقاً في النتائج النهائية المتعلقة بتحديد كمية الإنتاج. أما إذا ظهرت الكسور في هذه النتائج، فإن ذلك يتطلب معالجة الأرقام الكسرية لتحويلها إلى أرقام وأعداداً صحيحة. وتنصب هذه المعالجات بالأساس على النتائج التي تعبر عن الحل الأمثل للمشكلة. وتتمثل هذه النتائج عادة من خلال قيم المتغيرات الأساسية ومقدار قيمة دالة الهدف.

توجد ثلاث طرق رئيسية يمكن بواسطتها معالجة الحالات التي تظهر فيها بعض أو كل قيم المتغيرات الأساسية للمشكلة أعداداً غير صحيحة، وهذه الطرق هي[1]:

1- طريقة التقريب Approximation Technique.

2- طريقة قطع المستوي Cutting – plane Technique.

3- طريقة التفريع والتحديد Branch and Bound.

إن الطريقة الأولى تستخدم إذا كانت قيم المتغيرات كبيرة جداً بحيث لا تؤثر تأثيراً فعالاً على الحل الأمثل للمشكلة. ولو كان لدينا مجموعة من القيم تعبر عن حل معين لأحد المشاكل الإنتاجية، وذلك كما يلي:

---

(1) R. Branson. Operation Research, Mac Grow – Hill – Book company,. New York. 2001. , 54.

$X_1 \longrightarrow 889$
7.1

$X_2 \longrightarrow 997$
3.8

$X_3 \longrightarrow 211$
0.5

$X_4 \longrightarrow 372$
1.1

فإن هذه القيم يمكن تحويلها إلى أقرب عدد صحيح، على افتراض أن ذلك لا يؤثر إلى حد كبير في قيمة دالة الهدف، وذلك كما يلي:

$X_1 \longrightarrow 8$
897

$X_2 \longrightarrow 9$
974

$X_3 \longrightarrow 2$
111

$X_4 \longrightarrow 3$
721

في حالة كون قيم المتغيرات أعداداً صغيرة، فإن هذا الأسلوب يولـد لنـا قـيماً غير مقبولة وبعيدة عن الحل الأمثل. ويتطلب الأمر هنـا اللجـوء إلى الأسـلوب الاحتمالي الذي بموجبه يتم الكشف عن كافة بدائل حـل المشـكلة ولـيس الحـل الأمثل بالذات وعلى سبيل المثال لو كان لدينا القيم التالية:

$$X_1 \longrightarrow 6.4$$

$$X_2 \longrightarrow 4.5$$

$$X_3 \longrightarrow 3.6$$

لأجل الحصول على الحل الأمثل، يتطلب الأمر هنا اختبار جمع الحالات التي تكون فيها قيم المتغيرات الثلاث قريبة من القيم العددية الصحيحة، وذلـك كـما يلي:

$$1\begin{cases} X_1 = 6 \\ X_2 = 4 \\ X_3 = 3 \end{cases} \quad 2\begin{cases} X_1 = 7 \\ X_2 = 4 \\ X_3 = 3 \end{cases} \quad 3\begin{cases} X_1 = 6 \\ X_2 = 5 \\ X_3 = 3 \end{cases} \quad 4\begin{cases} X_1 = 7 \\ X_2 = 5 \\ X_3 = 3 \end{cases}$$

$$5\begin{cases} X_1 = 6 \\ X_2 = 4 \\ X_3 = 4 \end{cases} \quad 6\begin{cases} X_1 = 7 \\ X_2 = 5 \\ X_3 = 4 \end{cases} \quad 7\begin{cases} X_1 = 7 \\ X_2 = 4 \\ X_3 = 4 \end{cases} \quad 8\begin{cases} X_1 = 6 \\ X_2 = 5 \\ X_3 = 4 \end{cases}$$

ويمكن صياغة النموذج الريـاضي الـذي بموجبـه يـتم معرفـة عـدد بـدائل الحلول الممكنة بما في ذلك الحل الأمثل، وذلك كما يلي:

$$\boxed{P = S^n}$$

حيث أن:

n = عدد المتغيرات الأساسية.

S = عدد أرقام المتغير الأساسي.

P = الاحتمالات الممكنة لعدد الحلول.

إن طريقة التقريب في واقع الحال ليست كفؤة قياساً بالطرق الأخرى المتوفرة التي تعطي نتائج أفضل. ومن هذه الطرق طريقة قطع المستوى Cutting – Plane Technique التي تعتبر من الطرق المهمة والفعالة في تحويل النتائج غير الممكنة لمشكلات البرمجة الخطية إلى نتائج ممكنة تتفق مع واقع الحال. ويتم ذلك بإضافة قيود جديدة للمشكلة قيد الدرس. حيث أن القيد المضاف يسمى بالقطع (Cutting) وتستمر عملية تكوين قيود جديدة وإضافتها إلى المشكلة القديمة حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

إن الخطوات التي ينبغي اتباعها عند البحث عن الحل الأمثل باستخدام طريقة قطع المستوى هي نفس خطوات أسلوب جوردن أو خطوات طريقة السمبلكس مع الأخذ بنظر الاعتبار مهمة تكوين قيد جديد يضاف إلى النموذج الرياضي للمشكلة ويمكن تلخيص خطوات هذه الطريقة من خلال النقاط التالية:

1- إيجاد حل ممكن للمشكلة قيد الدرس بغض النظر عن كون الحل يتكون من قيم عددية صحيحة أو قيم عددية غير صحيحة باستخدام أحد طرق

الحل في البرمجة الخطية (مثل طريقة السمبلكس أو أسلوب جوردن أو الاثنين معاً).

2- إذا لم تكن جميع قيم متغيرات المشكلة أعداداً صحيحة، فإن ذلك يتطلب تكوين قيد جديد (قطع) يضاف إلى قيود المشكلة، ومن ثم يستمر البحث عن حل ممكن للمشكلة مرة أخرى للتأكد من اختفاء القيم الكسرية وهكذا تستمر العملية.

في إطار طريقة قطع المستوى، هناك أساليب أخرى تؤدي نفس الغرض المطلوب وذلك من خلال بدائل حل مختلفة. ومن هذه الأساليب هو أسلوب R.E. Gomory كومري الذي هو مؤلف أول طريقة يمكن من خلالها بلوغ الحل الأمثل للمشكلة قيد الدرس بعدد محدد من الخطوات، وبموجب هذه الطريقة يجري إدخال قيود إضافية من شأنها حصر المساحة الخاصة بالقيود المتعلقة بالحلول الممكنة. ويتم ذلك من خلال إلغاء إحدى النهايات الخاصة بالحل الأمثل الذي تكون فيه قيم المتغيرات الأساسي أعداداً غير صحيحة. وبعد إدخال القيود يجري تطبيق الحل المعتمد في البرمجة الخطية (أسلوب جوردن أو طريقة السمبلكس).كما سنرى في المشكلات الموضحة في الفقرات أدناه.

مشكلة رقم (1): مصنع متخصص بإنتاج ثلاث أنواع من المعدات وهي No_1, $No._2$, $No._3$ ويحتاج المصنع لإكمال عملية الإنتاج إلى ثلاثة أنواع من مستلزمات الإنتاج الأساسية وهي:

العنصر I.

العنصر II.

العنصر III.

مقدار ما يستهلك من هذه العناصر في إنتاج المعدات الثلاث، وكذلك المتوفر من مخزون العناصر III, II, I ، والربح المتوقع، يتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (3-14)

العناصـــر	وحدة القياس	المعدات			المتوفر من مخزون العناصر الثلاث
		No.1	No.2	No.3	
I	وحدة	3	2	0	10
II	وحدة	1	4	0	11
III	وحدة	3	3	1	13
الربح المتوقع		4	5	1	

المطلوب: طلبت إدارة المصنع من الأقسام الإنتاجية أن تتفرغ لوضع خطة يومية مثلى لإنتاج المعدات الثلاثة No.1 , No.2, No3 على أن يؤخذ بنظر الاعتبار الربح بمثابة المؤشر الأساسي في عملية اتخاذ القرار الأمثل.

الحل: إن الأقسام الإنتاجية ترتبط مباشرة بإدارة الإنتاج في المصنع المذكور. وقد شكلت لجنة على المستوى الإداري المذكور لدراسة هذه المشكلة، لوضع الحل المطلوب لها، حيث من الوثائق والمستندات الخاصة بالمشكلة تم وضع الفرضيات التالية:

X_1 عدد المنتجات من النوع No.1.

X_2 عدد المنتجات من النوع No.2.

X_3 عدد المنتجات من النوع No.3.

ومن منطوق المشكلة يظهر أن قيم المتغيرات الأساسية X_1 , X_2 , X_3، يجب أن تكون أرقاماً كاملة خالية من الكسور. ولغرض وضع خطة الإنتاج المثلى نعمد إلى تطبيق أسلوب Gomory[1].

إن استهلاك كل عنصر من العناصر الثلاث من المستلزمات الأساسية يحسب كما يلي:

العنصر I3 : $X_1 + 2X_2 + 0\,X_3$

العنصر II : $X_1 + 4X_2 + 0\,X_3$

العنصر III3 : $X_1 + 3X_2 + 1\,X_3$

ويكتب النموذج الرياضي للمشكلة كما يلي:

1- الشروط الأساسية:

$$X_1 + 2X_2 + 0\,X_3 \leq 103$$
$$X_1 + 4X_2 + 0\,X_3 \leq 11$$

---

(1) للتعرف على فكرة وتكتيك هذا الأسلوب، ننصح القارئ الكريم بمراجعة كتاب (GASS, S.I.) في البرمجة الخطية Linear Programming أو كتاب (Hamdy A . Taha) في بحوث العمليات (Operation Research) إصدار سنة 2007.

$$X_1 + 3X_2 + 1X_3 \leq 133$$

2- دالة الهدف (تعظيم الأرباح المتوقعة)

$$Z = 4X_1 + 5X_2 + X_3 \longrightarrow Max$$

3- الشروط المنطقية (اللاسلبية) $X_1, X_2, X_3 \geq 0$

إن المطلوب هو إيجاد القيم الرقمية الكاملة (X_1, X_2, X_3) التي تؤمن الحصول على أعلى قيمة ممكنة لـ Z مع تحقيق الشروط الأساسية والمنطقية أعلاه.

يتم إدخال متغيرات جديدة هي y_1, y_2, y_3 وذلك وفق الأسلوب التالي:

ويمكن كتابة العلاقات الرياضية في إطار الجدول التالي:

$$y_1 = -3X_1 - 2X_2 - 0X_3 + 10 \geq 0$$
$$y_2 = -1X_1 - 4X_2 - 0X_3 + 11 \geq 0$$
$$y_3 = -3X_1 - 3X_2 - 1X_3 + 13 \geq 0$$

ويمكن كتابة العلاقات الرياضية السابقة في إطار الجدول التالي:

جدول رقم (3-15)

	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	1
$y_1=$	3	2	0	10
$y_2=$	1	4	0	11
$y_3=$	3	3	1	13
$Z=$	-4	-5	-1	0

من الجدول أعلاه يتضح أن العمود الخاص بالقيم الحرة لا يحمل عناصر ذو إشارة سالبة، لذلك يتم الحصول على الحل الأساسي التالي:

$X_1 = 0, \ X_2 = 0, X_3 = 0$

$y_1 = 10 , y_2 = 11. y_3 = 13$

إن قيمة دالة الهدف لـ Z بالنسبة للحل الأساسي أعلاه هي صفر.

إن الطريقة أو الأسلوب الذي بموجبه يتم تحسين الحل الأساسي أعلاه هو أسلوب السمبلكس أو أسلوب جوردن ولو تم اعتماد الأسلوب الثاني فإنه بعد أن تتم المرحلة التالية من التبسيط على أساس الجدول (3-15) نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (3-16)

	$-X_1$	$-X_2$	$-X_3$	1
$y_1=$	$\frac{10}{4}$	$-\frac{2}{4}$	0	$\frac{18}{4}$
$X_2=$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{11}{4}$
$y_3=$	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{19}{4}$
$Z=$	$-\frac{11}{4}$	$\frac{5}{4}$	-1	$\frac{55}{4}$

إن قيمة دالة الهدف في هذه المرحلة تبلغ $\frac{55}{4}$ ، وهي قيمة ليست مثلى لأن الصف الخاص بدالة الهدف يحوي على عناصر سالبة. وبعد القيام بعدة مراحل من التبسيط المذكور (بالذات في المرحلة الثالثة). سوف يؤدي الأمر إلى أن نحصل على أقصى قيمة ممكن لـ Z وهي $\frac{194}{10}$ حيث تصبح عندها كل قيم الصف الخاص بدالة الهدف Z موجبة.

جدول رقم (3-17)

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	1
$X_1=$	$\frac{9}{10}$	$-\frac{2}{10}$	0	$\frac{18}{10}$

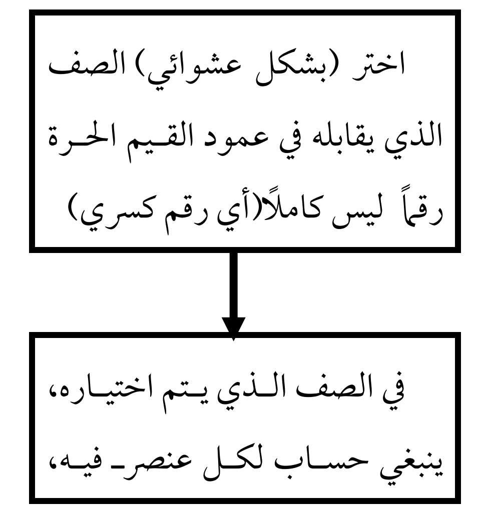
$X_2=$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
$X_3=$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$
$Z=$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	-1	$\frac{194}{10}$

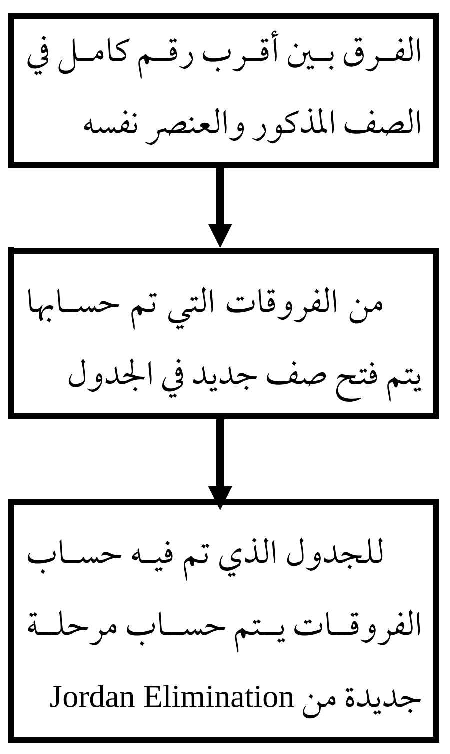
ورغم ذلك فإن القيمة المذكورة هي ليست بالقيمة المثلى، وذلك لأن قيمة المتغيرات الأساسية للحل أعلاه هي ليست بالقيم الرقمية الكاملة وهي ما يلي:

$$X_1=\frac{18}{10}\ ,\ X_2=\frac{23}{10}\ ,\ X_3=\frac{7}{10}$$

إن الحل أعلاه يستلزم تحسينه بالشكل الذي يؤدي إلى تحويل قيم المتغيرات الأساسية أعلاه إلى قيم رقمية كاملة وليست بالصيغ الكسرية. في هذه النقطة بالذات يتم الاستعانة بأسلوب Gomory وذلك استناداً إلى المخطط التالي:

الشكل رقم (3-8) المخطط الانسيابي لتحسين الحل الذي يتم الحصول عليه





من الجدول رقم (3-17) يتضح أن عمود القيم الحرة يحوي على عناصر لها قيم رقمية كاملة، ولأجل توضيح تطبيق المخطط الانسيابي السابق، يتم اختبار الصف الثالث وذلك كما يلي:

(1) العنصر $\longrightarrow -\frac{9}{10}$

(2) العنصر $\longrightarrow -\frac{3}{10}$

(3) العنصر $\longrightarrow 1$

(4) العنصر $\longrightarrow \frac{7}{10}$

العناصر التي تم اختيارها في الصف الثالث من الجدول رقم (3-17)

إن أقرب رقم كامل في الصف الثالث هو الرقم (1).

بعد ذلك يتم حساب الفرق بين الرقم الكامل أعلاه وبين بقية عناصر الصف المذكور (مع الحفاظ على الإشارة الحسابية للعنصر المطلوب حساب لـه الفـرق) وذلك كالآتي:

1- بالنسـبة للعنصر $-\frac{9}{10}$ الفـرق المطلـوب حسـابه للوصـول إلى الـرقم الكامل(1-)

هو الرقم $\left(-\frac{1}{10}\right)$ أي أن: $-1=\frac{-10}{10}=\frac{-1-9}{10}=\left(-\frac{9}{10}\right)+-\frac{71}{10}$.

2- بالنسـبة للعنصر $-\frac{3}{10}$ الفـرق المطلـوب حسـابه للوصـول إلى الـرقم الكامل (1-)

هو الرقم $\left(-\frac{7}{10}\right)$ أي أن: $\frac{-7-3}{10}=-\frac{7}{10}-\frac{3}{10}=\left(-\frac{3}{10}\right)+-\frac{7}{10}$

$$=\frac{-10}{10}=-1$$

3- بالنسبة للعنصر 1 الفرق المطلوب حسابه للوصول إلى الرقم الكامل (1)

هو الرقم (0) أي أن: 1 = (1) + 0.

4- بالنسبة للعنصر $\frac{7}{10}$ الفرق المطلوب حسابه للوصول إلى الرقم الكامل (0)

هو الرقم $\left(-\frac{7}{10}\right)$ أي أن: $0=\frac{0}{10}=\frac{-7+7}{10}=\left(-\frac{7}{10}\right)+-\frac{7}{10}$.

مما تقدم يتضح أن أقرب الأرقام الكاملة التي يمكن الحصول عليها ر هي:

(1) العنصر $-\frac{9}{10} \longrightarrow -1$

(2) العنصر $-\frac{3}{10} \longrightarrow -1$

(3) العنصر $1 \longrightarrow 1$

(4) العنصر $\frac{7}{10} \longrightarrow 0$

وعليه فإن الفروقات التي ستشمل عناصر الصف الجديد والتي سوف تضاف إلى الجدول هي:

$$-1-\left(-\frac{9}{10}\right)=-\frac{1}{10}$$

$$-1-\left(-\frac{3}{10}\right)=-\frac{7}{10}$$

$$1-1=\ 0$$

$$0-\ \frac{7}{10}=-\ \frac{7}{10}$$

واستناداً إلى ما تقدم فإن الجدول الجديد سوف يكون كالآتي:

جدول رقم (3–18)

	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	1
$X_1=$	$\frac{4}{10}$	$-\frac{2}{10}$	0	$\frac{18}{10}$
$X_2=$	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
$X_3=$	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$-\frac{7}{10}$
S_3	$-\frac{1}{10}$	$\left[-\frac{7}{10}\right]$	0	$-\frac{7}{10}$
$Z=$	$\frac{2}{10}$	$\frac{4}{10}$	1	$\frac{194}{10}$

إن الصف الجديد S3 يضيف شرط أضافي وذلك كما يلي:

$$S_3 = +\frac{1}{10}\ y_1 + \frac{7}{10}\ \ y_2 - 0.y_3\ -\frac{7}{10}\ .1 \geq 0$$

وبعد التبسيط سوق يكون كما يلي:

$$S_3 = +\frac{1}{10}\,(-y_1) - \frac{7}{10}\,(-y_2)\ +0(\,-y_3) - \frac{7}{10}\ .\ \geq 0$$

وعلى ضوء هذه المتغيرات الجديدة فإن دالـة الهـدف المسـتخرجة سـابقاً هـي ليست بالقيمة المثلى، ومن جهة أخرى فإن المتغيرات الأساسية:

$$X_3 = \frac{7}{10}$$

$$X_2 = \frac{23}{10}$$

$$X_1 = \frac{18}{10}$$

لا تضمن توفر الحل الأساسي، وذلك بسبب ظهور القيمـة السـالبة الجديـدة $-\frac{7}{10}$.

من أجل الحصول على حل أساسي، فإن الأمر يستدعي تنفيذ مرحلـة أخـرى وذلك من أجل إلغاء العنصر السالب في عمود القيم الحرة.

بعد أن يتم تحديد عنصر الحل وهو الرقم $-\frac{7}{10}$ ، يتم تنفيـذ المراحـل التاليـة من أسلوب جوردن وذلك سوف يؤدي إلى الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (3-19)

$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	1

$X_1=$				2
$X_2=$				2
$X_3=$				1
S_3				1
$Z=$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	1	19

إن الحل أعلاه هو الحل الأمثل، لذلك فإن النتائج النهائية هي ما يلي:

$y_1 = 0 , S_3 = 0, y_3 = 0$

$X_1 = 2 , X_2 = 2, X_3 = 1, y_2 = 1$

وإن القيمة المثلى لدالة الهدف $Z = 19$

الخطة اليومية التي وضعت من قبل اللجنة المشكلة من قبل إدارة الإنتاج تتضمن الفقرات التالية:

$X_1 = 2$ وهو يعني إنتاج عدد 2 من المعدات A يومياً.

$X_2 = 2$ وهو يعني إنتاج عدد 2 من المعدات B يومياً.

$X_3 = 1$ وهو يعني إنتاج عدد 1 من المعدات C يومياً.

$\begin{cases} y_1 = 0 \\ y_3 = 0 \end{cases}$ إن الخزين الاحتياطي من العنصر رقم 1، رقم 3 يقتضي الأمر استغلاله بالكامل.

$y_2 = 1$ وهو يعني أن وحدة واحدة من العنصر رقم 2 يبقى دون استغلال.

مشكلة رقم (2): تخصصت إحدى الشركات الصناعية في صناعة الأثاث الخشبي والموبليا وكان لديها نوعين من الألواح الخشبية. النوع الأول من الألواح الخشبية يتكون من 50 قطعة، مساحة كل قطعة 6 متر (X61).

النوع الثاني من الألواح من 100 قطعة مساحة كل قطعة 5 متر (X51) من هذين النوعين من الألواح يتطلب الأمر الحصول على 3 أنواع من الأثاث المنزلي حتى يكون بالمستطاع صنع هذه الأنواع الثلاث من الأثاث المنزلي يستلزم الأمر توفير لكل نوع من هذه الأنواع الثلاث ما يلي:

2 قطعة خشب بطول 2.4 متر.

3 قطعة خشب بطول 1.6 متر.

(على افتراض أن عرض وسمك كل قطعة من القطع المذكورة أعلاه يتفق تماماً مع قياسات قطعة الأثاث).

المطلوب: طلبت إدارة الشركة من إدارة الإنتاج دراسة المشكلة المذكورة في سبيل وضع برنامج خاص حول الكيفية التي يتم فيها تقطيع الأخشاب المتوفرة، حتى يكون بإمكان الشركة إنتاج أكبر ما يمكن من قطع الأثاث المنزلي.

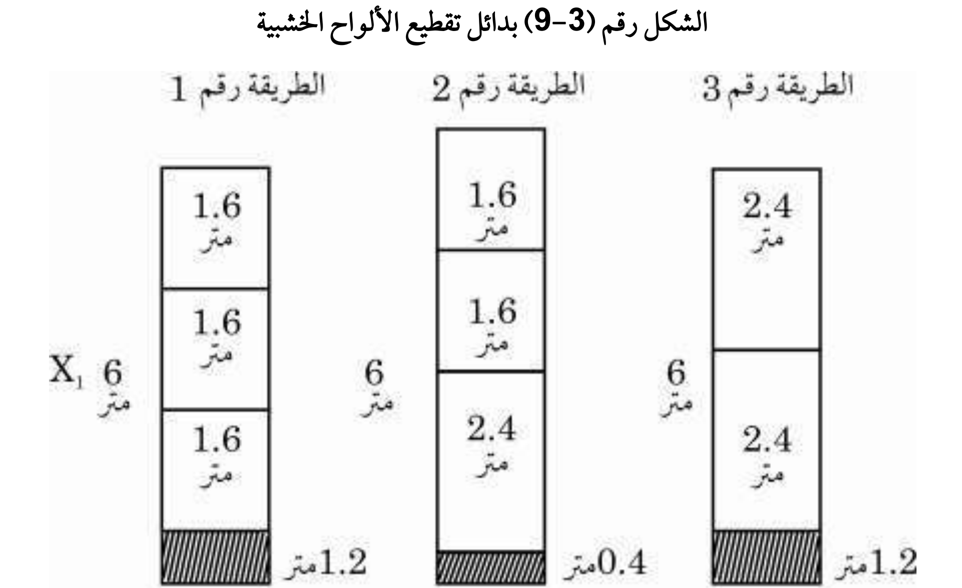
الحل: شكلت إدارة الإنتاج في الشركة المذكورة لجنة خاصة لدراسة المشكلة، وقد أجرت هذه الأخيرة التحليلات والعمليات الحسابية التالية:

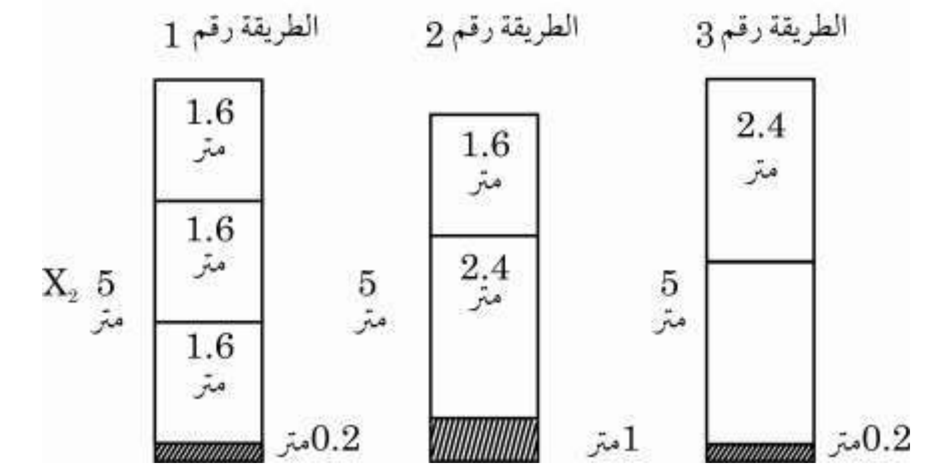
إن المشكلة يمكن عرضها على أساس الرسوم التوضيحية في الشكل (3-9) ويظهر في هذه الرسوم الكيفية التي يتم فيها تقسيم الألواح الخشبية وما يتبقى من فضلات ومخلفات بعد عملية التقطيع.

نفرض أن: X_{11} , X_{12} , X_{13} هي كمية الألواح ذو الطول 6 متر التي سوف تقطع حسب الطريقة رقم (1)، رقم (2)، رقم (3).

نفرض أن: X_{21} , X_{22} , X_{23} هي كمية الألواح ذو الطول 6 متر التي سوف تقطع حسب الطريقة رقم (1)، رقم (2)، رقم (3).

الشكل رقم (3-9) بدائل تقطيع الألواح الخشبية





ولذلك فإن الذي يتم الحصول عليه من الألواح ذو الطول 6 متر هو كالآتي:

1- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (1) هو $3x_{11}$ لوح بطول 1.6.

2- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (2) هو $2x_{12}$ لوح بطول 1.6.

3- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (3) هو $0x_{13}$ لوح بطول 1.6.

ما ينبغي الحصول عليه من الألواح ذو الطول 5 متر هو كالآتي:

1- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (1) هو x_{21}3 لوح بطول 1.6.

2- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (2) هو x_{22}2 لوح بطول 1.6.

3- الألواح المقطعة حسب الطريقة رقم (3) هو x_{23}0 لوح بطول 1.6.

أي أن مجموع ما ينبغي أن نحصل عليه من اللوح 1.6 متر من مجموع الألواح ذو الطول 6 هو كالآتي:

$$3X_{11} + 2X_{12} + 0X_{13}$$

أي أن مجموع ما ينبغي أن نحصل عليه من اللوح 1.6 متر من مجموع الألواح ذو الطول 5 هو :

$$3X_{21} + X_{22} + 0X_{23}$$

وأخيراً فإن مجموع الألواح ذو الطول 5 متر والطول 6 متر تغطي عدد من الألواح ذو الطول 1.6 متر هو ما يلي:

$$3X_{11} + 2X_{12} + 0X_{13} + 3X_{21} + X_{22} + 0X_{23}$$

وبنفس الطريقة تحسب عدد الألواح ذو الطول 2.4 التي يتم الحصول عليها من مجموع الأطوال ذو الطول 5 متر والطول 6 متر.

$$0X_{11} + X_{12} + 2X_{13} + 0X_{21} + X_{22} + 2X_{23}$$

إن عدد قطع الألواح ذو الطول 1.6 متر سوف تكفي لـ

$$\left(\frac{0X_{11}+ X_{12} + 2X_{13}+0X_{21}+X_{22} +2X_{23}}{3}\right)$$ من الأثاث المنزلي

تقوم بإدخال متغيرات جديدة هي α (حيـث أن: $\alpha = 0 , 1 , 2 , ...,$)

التي تحقق الشرط التالي:

$$\frac{3X_{11}+2X_{12}+0X_{13}+3X_{21}+X_{22}+0X_{23}}{3} \geq \alpha$$

$$\frac{0X_{11}+X_{12}+2X_{13}+0X_{21}+X_{22}+2X_{23}}{2} \geq \alpha$$

إن α تمثل عدد قطع الأثاث الكاملة.

إن الشروط الخاصة بالبرنامج فيما يتعلق بالألواح ذو القياس 5 متر والقيـاس 6 متر وهي ما يلي:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} = 50$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} = 100$$

إن النموذج النهائي للمشكلة قيد الدرس يمكن كتابتها بالصيغة التالية:

المطلوب: إيجاد أقصى قيمة ممكنة لدالة الهدف: $Z \longrightarrow \alpha$

مستوفياً الشروط التالية:

$$(1)\ X_{11}+X_{12}+X_{13}=50$$
$$(2)\ X_{21}+X_{22}+X_{23}=100$$
$$(3)\ \frac{3X_{11}+2X_{12}+0X_{13}+3X_{21}+X_{22}+0X_{23}}{3} \geq \alpha$$
$$(4)\ \frac{0X_{11}+X_{12}+2X_{13}+0X_{21}+X_{22}+2X_{23}}{2} \geq \alpha$$
$$\alpha = 0, 1, 2, ...$$

إن الشروط (3) ، (4) يمكن كتابتها وفقاً للصيغة التالية:

$$3X_{11}+2X_{12}+0X_{13}+3X_{21}+X_{22}+0X_{23} \geq 3\alpha$$
$$0X_{11}+X_{12}+2X_{13}+0X_{21}+X_{22}+2X_{23} \geq 2\alpha$$

ولو تم إدخال متغيرات جديدة $y_2 \geq 0$, $y_1 \geq 0$ فإن الشروط أعلاه، تكتب كما يلي:

$Y_1 =$	$3X_1 =$	+	$2X_{12}$	+	$0X_{13}$	+	$3X_{21}$	+	X_{22}	+	$0\alpha X_{23}$ -3	≥ 0
$Y_2 =$	$0X_1 =$	+	X_{12}	+	$2X_{13}$	+	$0X_{21}$	+	X_{22}	+	$\alpha 2X_{23}$ - 2	≥ 0
0 =	X_{11}	+	X_{12}	+	X_{13}						=	50
0 =					X_{21}	+	X_{22}	+	X_{23}		=	100

وعند إفراغ معاملات المتغيرات للنموذج أعلاه في جدول نحصل على ما يلي:

جدول رقم (20.3)

	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}	α	1
$y_1 =$	-3	-2	0	-3	1	0	3	0
$y_2 =$	0	-1	-2	0	-1	-2	2	0
0 =	1	1	1	0	0	0	0	50
0 =	0	0	0	1	1	1	0	100
Z =	0	0	0	0	0	0	-1	0

إن الخطوات والمراحل التالية في الحل تبدأ عندتطبيق أسلوب جوردن على أساس الجدول رقم (3-20)، حيث في النهاية يؤدي الأمر إلى الحصول على الحل الأمثل وهو البرنامج الأمثل لتقطيع الألواح الخشبية الموضحة بالشكل (3-9).

4.3. النمـوذج الرياضي لاتخاذ القرار الأمثل في ظل دالـة هـدف مزدوجـة:

في الواقع العملي يواجه متخذ القرار أحيانـاً مشـاكل ذات خصوصـية معينـة يكون فيها المطلوب تحقيق متناقضين في آن واحد. ويكـون المطلـوب هـو اتخـاذ القرار الأمثل بما يؤدي إلى أن تكون أحد قيم دالة الهدف أعلى ما يمكن والقيمـة الأخرى لدالة الهدف أقل ما يمكن. ولـو كـان الرمـز H_1 يمثـل أحـد قـيم دالـة الهدف وأن H_2 هو القيمة الأخرى، فإن عـلى متخـذ القـرار أن يختـار المتغـيرات الأساسية في إطار النموذج الرياضي بما يؤدي إلى أن تكون قيمة H_1 هي أعلى مـا يمكن (Max) وأن قيمة H_2 أقل (Min) وتكـون المحصـلة النهائيـة لهـذه الدالـة المزدوجة هو التعظيم (Max)، أي أن:

$$\left.\begin{array}{l}\longrightarrow Max \\ \longrightarrow Min\end{array}\right\}\longrightarrow Max \quad H=\frac{H_1}{H_2}$$

وقد يكون الأمر معكوساً، أي أن المطلوب هو أن تكون دالة الهدف H_1 أقـل ما يمكن (Min) وأن دالة الهدف H_2 ينبغي أن تكون أعـلى مـا يمكـن Max فـإن المحصلة النهائية لهذه الدالة المزدوجة هو المتغير Min، أي أن:

$$\left.\begin{array}{l}\longrightarrow Min \\ \longrightarrow Max\end{array}\right\}\longrightarrow Min \quad H=\frac{H_1}{H_2}$$

إن صيغة النموذج الرياضي الذي على أساسه يجري اتخاذ القرار الأمثل تتضح من المثال أدناه:

مثال رقم (1): إحدى الشركات المتخصصة بإنتاج المواد الغذائية، ترغب بطرح نوعين من المنتجات وهما: المنتج رقم (1) والمنتج رقم (2) حصلت هذه الشركة على التسهيلات اللازمة لتصدير منتجاتها إلى السوق الخارجية، حيث أن منتجاتها كانت على درجة كافية من الجودة بما يمكنها من دخول المنافسة في السوق الخارجية.

ترغب الشركة المذكورة في وضع خطة إنتاج خاصة بالمنتج رقم (1) ورقم (2) بالشكل الذي يؤمن لها الحصول على أكبر كمية ممكنة من العملة الصعبة وذلك بما يحقق أقل التكاليف الإنتاجية الممكنة.

طلب مدير الشركة من إدارة الإنتاج معالجة هذه المشكلة على أساس البيانات التالية:

جدول رقم (3-21)

المتوفر من المستلزمات الأساسية	المنتجات		وحدة القياس	التفاصيل المتعلقة باستخدام المستلزمات الأساسية
	المنتج رقم (2)	المنتج رقم (1)		
6	2	3	كيلة غرام	استهلاك المواد للوحدة الواحدة
9	3	6	ساعة/ ماكنة	وقت العمل المصروف لإنتاج وحدة واحدة باستخدام الماكنة A
8	4	4	ساعة/ ماكنة	وقت العمل المصروف لإنتاج وحدة واحدة باستخدام الماكنة B
	80	100	دينار	كلفة الوحدة الواحدة من المنتوج
	2	3	دولار	سعر التصدير
	0.5	0.5	ألف كيلو غرام	الحد الأدنى من احتياجات المستورد الأجنبي من الإنتاج

الحل: شكلت لجنة خاصة من إدارة الإنتاج والإدارة المالية لدراسة المشكلة، وقد وضعت اللجنة المذكورة الفرضيات التالية:

X ← حجم الإنتاج بشكل عام.

عليه فإن: X_1← حجم الإنتاج من المنتج رقم (1).

X_2← حجم الإنتاج من المنتج رقم (2).

وبناءً على ذلك، فإن كمية المادة المستهلكة لإنتاج كل منتج هي كما يلي:

$3X_1 + 2X_3$

إن وقت العمل المطلوب لذلك هو:

$X_1 + 3X_2$ 6 باستخدام الماكنة A

$X_1 + 4X_2$ 4 باستخدام الماكنة B

إن المتوفر من المستلزمات الأساسية للإنتاج محدودة، ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$(1) \quad 3X_1 + 2X_2 \leq 6$$
$$(2) \quad 6X_1 + 3X_2 \leq 9$$
$$(3) \quad 4X_1 + 4X_2 \leq 8$$

إن حجم الإنتاج من المنتج الأول (X_1)، وحجم الإنتاج من المنتج الثاني (X_2) يجب أن لا يقل عن الحد الأدنى لحاجة المستورد الأجنبي، أي:

$$(4) \quad X_1 \geq 0.5$$
$$(5) \quad X_2 \geq 0.5$$

إن تكاليف الإنتاج تحسب كما يلي:

$$(6) \quad K = 100X_1 + 80X_2$$

إن العوائد المتوقعة من العملة الصعبة تحسب كالآتي:

$$(7) \quad W = 3X_1 + 2X_2$$

بناء على ما تقدم فإن الهدف Z تحسب كالآتي:

$$(8) \quad Z = \frac{W}{K} = \frac{3X_1 + 2X_2}{100X_1 + 80X_2}$$

ولما كان البسط W مطلوب تعظيمه، وأن المقام K مطلوب تصغيره، فإن دالة الهدف (Z) ينبغي أن تصل إلى أعظم قيمة لها.

إن مواصفات الخطة المثلى للإنتاج هي تلك الخطة التي تكون فيها قيم المتغيرات X_1 , X_2 الأساسية تجعل من دالة الهدف Z أعلى ما يمكن مع تحقيق الشروط من 1-5.

يمكن حل هذه المشكلة باستخدام طريقة السمبلكس مع الاستعانة. ويتطلب ذلك إدخال متغيرات جديدة، وهي y_1 , y_2 , y_3 , y_4 , y_5، وذلك كما يلي:

$$y_1 = -3X_1 - 2X_2 + 6 \geq 0$$
$$y_2 = -6X_1 - 3X_2 + 9 \geq 0$$
$$y_3 = -4X_1 - 4X_2 + 8 \geq 0$$
$$y_4 = X_1 - 0.5 \geq 0$$
$$y_5 = X_2 - 0.5 \geq 0$$

إن النموذج أعلاه يكتب في جدول خاص وذلك كما يلي:

جدول رقم (3-22)

	$-X_1$	$-X_2$	1
$y_1=$	3	2	-6
$y_2=$	6	3	-9
$y_3=$	4	4	-8
$Y_4=$	-1	0	$\frac{1}{2}$
$y_5=$	0	-1	$\frac{1}{2}$
$W=$	-3	-2	0
$Z=$	-100	-80	0

طبقاً لقواعد Jordan Elimination ينبغي إلغاء القيمة السالبة في عمود القيم الحرة. ويتم اختيار عنصر الحل طبقاً للمخطط الانسيابي الموضح بالشكل (3-1) يتحدد الحل الأساسي الذي حصلنا عليها هو كما يلي:

$$y_4 = 0, y_5 = 0$$

$$y_1 = \frac{7}{2} \ , y_2 = \frac{9}{2} \ , y_3 = 4, X_1 = \frac{1}{2} \ , X_2 = \frac{1}{2}$$

إن قيمة دالة الهدف Z هي:

وحتى يصبح بالإمكان فهم الدلالات الرياضية لنموذج المشكلة الرياضي الموضح سابقاً، (وذلك في ضوء النتائج التي تم الحصول عليها)، يستدعي الأمر الاعتماد على الرسم البياني رقم (3-10). ويتطلب ذلك تحويل المتباينات الرياضية من (1-5) إلى معادلات على افتراض أن (L) هو الرمز لكل معادلة وذلك كما يلي:

$L_1 : 3X_1 + 2X_2 = 6$

$L_2 : 6X_1 + 3X_2 = 9$

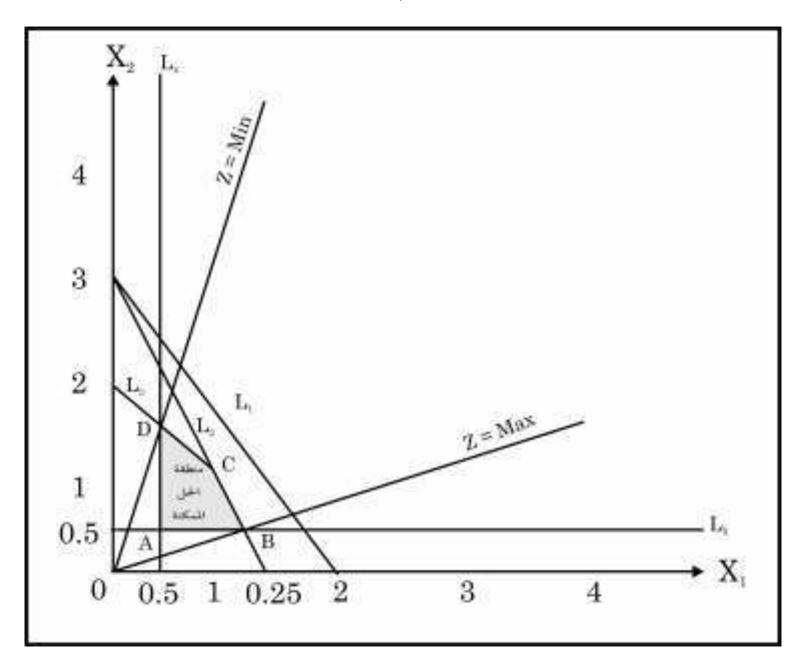
$L_3 : 4X_1 + 4X_2 = 8$

$L_4 : X_1 = 0.5$

$L_5 : X_2 = 0.5$

الشكل البياني الذي تتضح من خلاله هذه المعادلات هو ما يلي:

الشكل رقم (3–10)



إن الشكل (ABCD) يمثل المساحة الخاصة بالحلول الممكنة.

إن دالة الهدف Z هي كما مر معنا في العلاقة رقم (8) تساوي:

$$Z = \frac{3X_1 + 2X_2}{100X_1 + 80X_2}$$

بعد ضرب الوسطين في الطرفين نحصل على:

$Z\,(100\,X_1 + 80X_2\,) = 3X_1 + 2X_2$

ومنه نحصل على ما يلي:

$$X_2 = \frac{3-100Z}{2-80Z} X_1$$

إن الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه $\left(X_1 = \frac{1}{2} , X_2 = \frac{1}{2} \right)$ في الجدول السابق كان السبب في تحديد النقطة A، وهي ليست بالنقطة التي عندها الحل يكون أ مثلاً. إن الحل الأمثل الذي يتواجد عند النقطةB يمكن التوصل إليه بشكل مباشر من خلال توصيل مستقيم من النقطة إلى المحور X_1.

ويكشف تقرير لجنة إدارة الإنتاج الذي يستند إلى الحل الأمثل الذي يتم الحصول عليه من الشكل البياني السابق والجدول الأخير من تبسيط جوردن الاستنتاجات التالية(1):

1) $\begin{cases} y_2 = 0 \\ y_5 = 0 \end{cases}$ وهذا يعني أن الحل الأمثل يقع في نقطة تقاطع المستقيمات L_2 ، L_5 حيث أن ظهور $y_2 = 0$ يعني أن الطاقة الاحتياطية من وقت العمل باستخدام الماكنة A قد استنفذت بالكامل. في حين أن $y_5 = 0$ يعني أن الحد الأدنى فقط في احتياجات المستورد الأجنبي من المنتج رقم (2) يتم إشباعها.

2) $y_1 = \frac{5}{4}$ وهو يعني أن هناك احتياطي فائض من المواد تبلغ كميتها:

---

(1) ننصح القارئ الكريم لمراجعة مؤلفنا الموسوم:

نمذجة القرارات الإدارية، بالاشتراك مع د. علي حسين علي، إصدار مؤسسة اليازوري للنشر والتوزيع، 1999، ص 209.

$$1000.\frac{5}{4}=1250$$ كيلو غرام

3) $Y_3 = 1$ إن وقت العمل غير المستغل باستخدام الماكنة B يبلـــغ

1.1000 = 1000 ساعة/ ماكنة

4) $y_4 = \frac{3}{4}$ وذلــك يعنــي أن مــن المفــروض إنتــاج 750 كيلــو غــرام $\left(1000 \, . \, \frac{3}{4}\right)$ إضافية من المنتج رقم (1) أكثر من الحد الأدنى المطلـوب مـن قبل المستورد الأجنبي.

5) $X_1 = \frac{5}{4}$ وهــو يعنــي أن مــن المفــروض إنتــاج 1250 كيلــو غــرام $\left(1000 \, . \, \frac{5}{4}\right)$ من المنتج رقم (1) حتى تتحقق الخطة المثلى.

6) $X_2 = \frac{1}{2}$ وهــو يعنــي أن مــن المفــروض إنتــاج 500 كيلــو غــرام $\left(1000 \, . \, \frac{1}{2}\right)$ من المنتج رقم (1) حتى تتحقق الخطة المثلى.

7) إن القيمة المثلى لدالة الهدف Z هي كالآتي:

$$Z = \frac{3X_1 + 2X_2}{100X_1 + 80X_2} = \frac{57}{12} . \frac{1}{165} = 0.0287 \quad \frac{\text{دولار}}{\text{دينار}}$$

واستناداً الى مفردات الخطة المثلى للإنتاج الموضـحة أعـلاه، فـإن لكـل 1000 دينار من التكاليف المصروفة على الإنتاج سوف تكون هناك عوائد نقدية بالعملة الصعبة يبلغ مقدارها 28.7 دولار.

5.3. نموذج البرمجة الخطية الخاضع لتأثيرات العوامل في دالة الهدف والمحددات:

يقصد بالعوامل تلك الأرقام الحرة التي ترافق المتغيرات في معادلة دالة الهدف أو العلاقات الرياضية الخاصة بالشروط والمحددات. إذ أن لهذه العوامل تأثير على طبيعة دالة الهدف. حيث كلما تغيرت هذه العوامل (ضمن حدود معينة) كلما كان لذلك تأثير على قيمة دالة الهدف وبالتالي الحل الأمثل، والمشكلة الموضحة أدناه تعرض هذه الفكرة.

مشكلة رقم (1): منظمة أعمال صناعية معينة متخصصة في إنتاج نوعين من المنتجات وهما المنتج رقم (1) والمنتج رقم (2)، لإنتاج هذين النوعين من المنتجات يستلزم الأمر وجود نوعين من المواد الأولية هي II أو I التفاصيل المتعلقة بالإنتاج يعكسها الجدول التالي:

جدول رقم (3-24) بيانات المشكلة

المستلزمات الأساسية للإنتاج	المنتجات		المتوفر من المستلزمات الأساسية
	رقم 1	رقم 2	
المادة I	1	3	150
المادة الأولية II	1	1	70
المعدات	2	1	120

إن الربح في الوقت الحاضر الذي يأتي من بيع المنتج رقم (1) والمنتج رقم (2) هو كما يلي:

المنتج رقم 1 الربح المتوقع منه 20 وحدة نقدية.

المنتج رقم 2 الربح المتوقع منه 30 وحدة نقدية.

علماً بأن بمرور الوقت أن مقدار الربح المذكور سوف يتغير، حيث سوف يرتفع الربح المتوقع من المنتج رقم (1) إلى 30 وحدة نقدية. في حين سوف ينخفض الربح المتوقع من المنتج رقم 2 إلى 10 وحدة نقدية.

طلبت إدارة المنظمة من إدارة الإنتاج دراسة لمشكلة لوضع خطة مثلى للإنتاج تعتمد بشكل مباشر على التغيير الحاصل في قيمة الربح المتوقع من بيع وحدة من المنتج رقم 1، رقم 2 مؤشر الأمثلية في هذه الحالة هو تحقيق أعلى عائد ممكن من الأرباح السنوية.

الحل: قامت لجنة متخصصة منبثقة عن إدارة الإنتاج بدراسة المشكلة، وتم وضع الفرضيات التالية:

نفرض أن X هو رمز لكمية الإنتاج.

لذلك فإن X_1 ← الكمية المخطط إنتاجها من المنتج رقم (1) لكل سنة.

X_2 ← الكمية المخطط إنتاجها من المنتج رقم (2) لكل سنة.

على أساس الجدول رقم (3–24) يتم صياغة الشروط الخاصة بالمشكلة وذلك كما يلي:

$$X_1 + 3X_2 \leq 150$$
$$X_2 + X_2 \leq 70$$
$$2X_1 + X_2 \leq 120$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

وحتى يمكن استيعاب التغير في ربح الوحدة الواحدة المتوقع من المنتج رقم (1) والمنتج رقم (2) وذلك أثناء البحث عن الحل الأمثل للمشكلة، يتم إدخال عامل معين وهو λ والذي يمثل الحدود التي يتغير بينها الربح.

إن ربح الوحدة الواحدة المتوقع من المنتج رقم (1) بمرور الوقت يرتفع من 20 وحدة نقدية إلى 30 وحدة نقدية، ويمكن كتابة ذلك كما يلي:

$20 + \lambda$ عندما $0 \leq \lambda \leq 10$

إن الربح للوحدة الواحدة المتوقع من المنتج رقم (1) ينخفض من 30 إلى 10 وحدة نقدية، وذلك كما يلي:

$30 - 2\lambda$ عندما $0 \leq \lambda \leq 10$

إن دالة الهدف تأخذ الصيغة التالية:

$$Z = (20 + \lambda) X_1 + (30 - 2\lambda)$$

وبذلك يكون بيد متخذي القرار نموذج رياضي خطي خاضع لتأثيرات العوامل في دالة الهدف أو في المحددات. ويمكن حل هذا النموذج الرياضي باستخدام طريقة السمبلكس مع الاستعانة بتبسيط جوردن.

يتم في البداية إدخال المتغيرات الجديدة حيث أن:

$y_1 \geq 0 , y_2 \geq 0 , y_3 \geq 0 ,$

وذلك كما يلي:

$$y_1 = 150 - (X_1 + 3X_2) = 1(-X_1) + 3(-X_2) + 150 \geq 0$$
$$y_2 = 70 - (X_1 + X_2) = 1(-X_1) + 1(-X_2) + 70 \geq 0$$
$$y_3 = 120 - (2X_1 + X_2) = 2(-X_1) + 1(-X_2) + 120 \geq 0$$

إن المتغيرات y_2 ، y_1 تمثل كمية المواد المواد الأولية ,II غير المستغلة، في حين أن y_3 يمثل الطاقة غير المستغلة من الطاقة التشغيلية للمعدات.

هناك حالتين أحدهما = والأخرى >

نأخذ حالة التساوي، أي:

$$y_1 = 1 (-X_1) + 3 (-X_2) + 120 = 0$$
$$y_2 = 1 (X_1) + 1 (-X_2) + 70 = 0$$
$$y_3 = 2 (-X_1) + 1 (-X_2) + 120 = 0$$

بالمفهوم الهندسي فإن المعادلات الرياضية أعلاه هي مستقيمات، وأن معادلاتها الرياضية تكتب بالصيغة التالية:

$$y_1 = 0 : \quad X_1 + 3X_2 = 150$$
$$y_2 = 0 : \quad X_1 + \quad X_2 = 70$$
$$y_3 = 0 : 2X_1 + \quad X_2 = 120$$

إذا أردنا أن نحصل على النتائج والحلول من خلال رسم بياني، فإن الأمر سيتدعي تحديد دالة هدف التي تتغير بالحدود : $10 \leq \lambda \leq 0$ ولو أخذنا حالة التساوي أي:

$$\lambda = 10 \ (1)$$

$$\lambda = 0 \ (2)$$

ويتضح أن تأثير λ على دالة الهدف من خلال التعويض بالمعادلة:

$$Z = (20+\lambda) X_1 + (30-\lambda) X_2$$

وعندما نحصل على ما يلي:

$$Z(\lambda=0) \quad Z_1 = 20X_1 + 30X_2$$
$$Z(\lambda=10) \quad Z_2 = 30X_1 + 10X_2$$

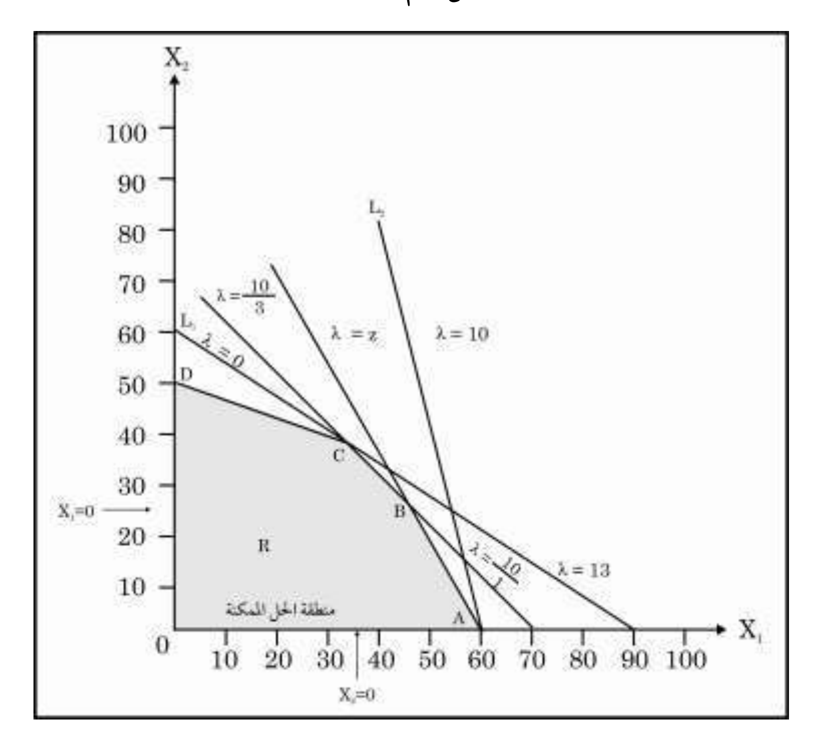
أي أن لدينا معادلتين لهدالة الهدي هي[1]:

$$Z_1 = 20X_1 + 30X_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow \lambda = 0$$

$$Z_2 = 30X_1 + 10X_2 \longrightarrow L_2 \longrightarrow \lambda = 10$$

إن معادلات مع المستقيمات L_1 , L_2 (عندما تكون Z_1 , Z_2 هـي قـيم مـثلى) يمكن تصوريرها مع المستقيمات الأخرى $(y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 0, \lambda = 0, \lambda = 10)$ وذلك كما يلي:

الشكل رقم (3-11)



---

(1) وهنا يمكن أيضاً تحديد العلاقات الرياضية الخاصة بمعاملات الاتجاه وهي K2 ، K2 وذلك كما يلي:

$$X_1 = -\frac{20}{30}X_1 + \frac{Z_1}{30} = K_1 \ X_1 + b_1$$

$$X_2 = -\frac{30}{30}X_2 + \frac{Z_2}{30} = K_2 \ X_2 + b_2$$

من الشكل رقم (3–11) يتضح أنه عندما تكون $\lambda = 0$ فـإن الحـل الأمثـل يكون موجود في النقطة C والتي تتحدد من خلال تقاطع $y_1 = 0 , y_2 = 0$.

من الرسم نلاحـظ أن هنـاك حركـة للمسـتقيم L_1 (والـذي عنـده $\lambda = 0$) وهذه الحركـة اتجاهها هـو نفـس اتجـاه عقـرب السـاعة وهـذه الحركـة محـددة للمستقيمات المحصورة بين قيمة $\lambda = 0$ وقيمة $\lambda = 0$.

أثناء حركة المستقيم λ (والذي يمثل قيمة معينة لدالة الهدف) باتجـاه حركـة عقرب الساعة فإنه سوف يلتقي في لحظة معينة مع المستقيم $y_2 = 0$. ولكـي يـتم حساب قيمة λ يجـب أن نوضـح معادلـة الخـط المسـتقيم الـذي عنـده $y_2 = 0$ والمعادلة العامة لدالة الهدف، أي أن:

$$y_2 = 0 \longrightarrow (X_1 + X_2) = 70$$
$$\lambda = ? \longrightarrow (20 + \lambda) = X_1 + (30 - 2\lambda) X_2$$

يقسم الطرفين على ($30 - 2\lambda$) وبعد التبسيط نحصل على ما يلي:

$$X2 = -1 X_1 + 70$$

$$X_2 = \frac{20 + \lambda}{30 + 2\lambda} X_1 + \frac{Z}{30 + 2\lambda}$$

إن المستقيم الذي يمثل دالة الهدف ينطبق مع المستقيم $y_2 = 0$ فـيما لـو كانـت معاملات الاتجاه لكلا المستقيمين هي نفسها، أي أن:

$$\frac{20 + \lambda}{30 + 2\lambda} = 1$$

ومنه نستنتج أن:

$$20+\lambda = 30 + 2\lambda$$

$$\lambda = \frac{10}{3}$$

أي عندما تكون $\lambda = \frac{10}{3}$ فإن مستقيم دالة الهدف ينطبق مع المستقيم $y_2 = 0$

أما الحل الأمثل فيكون عند النقطة C، ويتحدد من خلال القيم التالية:

$$0 \le \lambda \le \frac{10}{3}$$

لو تم زيادة معاملة الاتجاه بصورة تدريجية فإنه سوف ينقل الحل الأمثل من النقطة C ال النقطة B (باتجاه حركة عقرب الساعة) والتي هي تظهر نتيجة تقاطع المستقيمات التالية:

$$y_2 = 0$$
$$y_1 = 0$$

في سبيل تحديد قيمة λ يمكن أن الحل الأمثل يبقى في النقطة B، يقتضي الأمر حساب قيمة λ التي ترسم الاتجاه لمستقيم دالة الهدف بالشكل الذي ينطبق مع اتجاه المستقيم $y_3 = 0$. وبنفس الأسلوب السابق، أي:

$$X2 = -1\, X_1 + 70$$

$$X_2 = \frac{20+\lambda}{30+2\lambda} X_1 + \frac{Z}{30+2\lambda}$$

إن المستقيمات أعلاه $y_3 = 0$ ومستقيم دالة الهدف يمكن أن تتطابق لو أن لها معامل اتجاه واحد، أي:

$$\frac{20+\lambda}{30+2\lambda} = 2$$

وبعد التبسيط:

$$20+\lambda = 60 + 4\lambda$$
$$\lambda = 8$$

أي لو كانت قيمة $\lambda = 8$ ، فإن مستقيم دالة الهدف (عندما تكون دالة الهدف Z ذو قيمة مثلى) ينطبق مع المستقيم $y_3 = 0$.

إن الحل الأمثل في النقطة B يبقى أمثلاًضمن الحدود التالية للعامل λ :

$$\frac{10}{3} \leq \lambda \leq 8$$

وبنفس الطريقة للنقطة A (التي تتكون من تقاطع المستقيمات $X_2 = 0$, y_2) يكون من السهل التأكد أن الحل الأمثل في النقطة A يبقى أمثلا ضمن الحدود التالية للعامل λ :

$$8 \leq \lambda \leq 10$$

مما تقدم يتضح أن مشاكل البرمجة الخطية الخاضعة لتأثيرات العوامل تكون على شيء من البساطة والوضوح عندما تكون عدد المتغيرات الأساسية للمشكلة اثنان فقط، وبعكسه فإن المشكلة تكون صعبة الحل في حالة كون المتغيرات أكثر من ذلك.

المشكلة أعلاه يمكن حلها عن طريق أسلوب السمبلكس وذلك كالآتي:

عندما تكون[1] $\lambda = 0$

(1) من منطوق السؤال يتضح أن الرقم 10 هو أقصى ما يمكن أن تصل اليه قيمة المتغير λ .

دالة الهدف الأساسية: $Z = 20 X_1 + 30 X_2$

دالة الهدف المحورة: $Z = (20+\lambda) X_1 + (30-2\lambda) X_2$

الشروط والمحددات:

$y_1 = 1 (-X_1) + 3 (-X_2) + 150 = 0$

$y_2 = 1 (-X_1) + 1 (-X_2) + 70 = 0$

$y_3 = 2 (-X_1) + 1 (-X_2) + 120 = 0$

استناداً الى المعطيات أعلاه يتم بناء الجدول رقم (3-25) وذلك كالآتي:

جدول رقم (3-25)

	$-X_1$	$-X_2$	1
$y_1=$	1	3	150
$y_2=$	1	1	70
$y_3=$	2	1	120
$Z_{\lambda=0}$	-20	-30	0
$Z=$	$-20-\lambda$	$-30+\lambda$	0

ولما كانت هناك عناصر سالبة في الصف Z، عليه يستلزم الأمر الاستعانة بأسلوب Jordan Elimination . وعليه فإن أول خطوة بموجب هذا الأسلوب هو تحديد عمود وصف الحل وذلك كالآتي:

$Min \{ -20 - 30\} = - 30$ (العمود X_2)

$Min \left\{ \frac{120}{1}, \frac{70}{1}, \frac{150}{3} \right\} = 50$ (الصف y_1)

وبناءاً على ما تقدم يتم بناء الجدول التالي:

جدول رقم (3–26)

	$-X_1$	$-y_2$	1
$X_2=$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	50
$y_2=$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	20
$y_3=$	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{3}$	70
$Z_{\lambda=0}$	-10	10	150
$Z=$	$10-\frac{5}{3}\lambda$	$10-\frac{2}{5}\lambda$	$1500-1002\lambda$

الصف الذي يحوي عناصر دالة الهدف ($= Z\big|_{\lambda=0}$) فيه قيمة سـالبة لـذلك يقتضي الأمر القيام بخطوة جديدة من الأسلوب المشار اليه أعلاه وذلك كما يلي:

جدول رقم (3–27)

	$-y_2$	$-y_2$	1
$X_2=$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	50
$X_1=$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{2}$	30
$y_3=$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	20
$Z_{\lambda=0}$	15	5	1800
$Z=$	$15-\frac{5}{2}\lambda$	$15-\frac{3}{2}\lambda$	$1800-50\lambda$

من الجدول أعلاه يمكن أن نحصل على الحل الأمثل عنـدما $\lambda = 0$ وذلـك كالآتي:

$$X_1 = 30\ ,\ X_2 = 40$$

$$y_1 = 0\ ,\ y_2 = 0,\ \ y_3 = 20$$

$$Z_{\lambda=0} = 1800 - 50\lambda$$

الخطوة التالية هي لغرض السيطرة والتحليل وذلك من أجل بيان القيم الخاصة بـ λ التي عندها الحل يبقى أمثلاً حيث أن هناك معيار عام يمكن الاستعانة به في هذه الحالة وهو أن الحل يبقى أمثلاًلو أن العناصر الموجودة في الصف الخاص بدالة الهدف Z بها قيم ليست سالبة.

نأخذ القيم الموجودة في الصف المذكور.

$\lambda = \frac{15}{\frac{5}{2}} \geq 0$ ينبغي أن تكون $\frac{5}{2} = -15$ .... (1)

$\lambda = \frac{5}{\frac{3}{2}} \geq 0$ ينبغي أن تكون $\frac{3}{2}\lambda = -5$ .... (2)

إن العلاقات الرياضية أعلاه تبقى على الحل أمثلاًعندما تكون λ كالآتي:

1) عندما تكون $0 \leq \lambda \leq \frac{10}{3}$

ولو أن نتيجة التعويض عن قيمة λ بما يساوي $\lambda = \frac{15}{\frac{5}{2}}$

$\lambda = \frac{5}{\frac{3}{2}}$

تكون النتيجة الحصول على عناصر ذات قيمة موجبة .

إن الحل الذي حصلنا عليه أعلاه وهو $X_1 = 30$, $X_2 = 40$ يلائم النقطة C.

أي أن الحل سوف يكون أمثلا عند النقطة المذكورة طالما أن $\left(0 \leq \lambda \leq \frac{10}{3}\right)$

العناصر الموجودة في صف دالة الهدف ليست سالبة. وأن النقطة تتحدد من خلال الإحداثيات التالية:

$X_1 = 30$

$X_2 = 40$

وأن قيمة دالة الهدف Z تحسب كالآتي:

$\lambda = 1800 + 50Z$

2) عندما تكون $\frac{10}{3} \leq \lambda \leq 8$

ولنأخذ على سبيل المثال القيمة $\frac{10}{3} < \lambda$ فإن الصف الخاص بدالة الهدف Z سوف تكون له قيمة سالبة لأن التعويض عن قيمة λ أعلاه في: $\left(5 - \frac{3}{2}\lambda\right)$ فإن الناتج سوف يكون سالب، ولكي يكون بالإمكان الحصول على الحل الأمثل عندما $\frac{10}{3} < \lambda$ يقتضي الأمر القيام بمرحلة جديدة من مراحل أسلوب جوردن.

عمود الحل يتم اختياره عند العنصر الذي يساوي $\left(5 - \frac{3}{2}\lambda\right)$ أي عند صف دالة الهدف Z بعد أن يتم التعويض عن قيمة $\frac{10}{3} < \lambda$ في حين أن صف الحل يتحدد كالآتي:

وهو الصف $Min\left\{\frac{120}{\frac{1}{2}}, \frac{40}{\frac{1}{2}}\right\} = 40 \quad y_3$

وبعد ذلك يتم بناء الجدول التالي:

جدول رقم (3–28)

	$-y_2$	$-y_3$	1
$X_2=$	2	-1	20
$X_1=$	-1	1	50
$y_1=$			
$Z=$	$40-5\lambda$	$-10+3\lambda$	$1600-10\lambda$

من الجدول رقم (3–27) تم استبعاد الصف $= Z\big|_{\lambda=0}$ لأن للقيمة $\lambda = 0$ قد تم حساب الحل الأمثل ولم يعد هناك حاجة لذكرها.

من الجدول أعلاه يمكن أن نحصل على الحل الأمثل عندما $8 \leq \lambda \leq \frac{10}{3}$ وذلك كالآتي:

$X_1 = 50 \qquad y_1 = 40$

$X_2 = 20 \qquad y_2 = 0$

$y_3 = 0$

وأن قيمة ودالة الهدف Z تحسب كالآتي:

$\lambda = 1600 + 10Z$

والخطوة التالي هي لغرض السيطرة والتحليل وذلك من أجل بيان القيم المتعلقة بـ λ التي عندها الحل يبقى أمثلاً.

إن الحل يبقى أمثلاًلو أن العناصر الموجودة في الصف الخاصة بدالة الهدف Z لها قيم ليست سالبة:

$$\lambda \leq 8 \quad 0 \geq \text{ينبغي أن تكون} \qquad 40-5\lambda \longrightarrow \quad \text{..........(1)}$$

$$\lambda \geq \frac{10}{3} \quad 0 \geq \text{ينبغي أن تكون} \qquad -10+3\lambda \longrightarrow \quad \text{..........(2)}$$

إن العلاقات الرياضية أعلاه تبقى على الحل أمثلاًعندما تكون λ كالآتي:

$$\frac{10}{3} \leq \lambda \leq 8$$

إن الحل الذي حصلها عليه $X_1 = 50$, $X_2 = 20$ يتفق مع النقطة B. أي أن الحل سوف يكون أمثلاًعند النقطة المذكورة طالما أن $\frac{10}{3} \leq \lambda \leq 8$ وأن العناصر الموجودة في صف دالة الهدف ليس سالبة والنقطة B تتحدد من خلال الإحداثيات $X_1 = 50$, $X_2 = 20$ وأن قيمة دالة الهدف تحسب كالآتي:

$$\lambda = 1600 + 10Z$$

أما إذا كانت : $8 \leq \lambda \leq 10$

عليه يتم التحقق من تأثير القيم الموجودة في الحدود $8 \leq \lambda \leq 10$ على العناصر:

$$40 - 5\lambda$$
$$(-10 + 3\lambda)$$

وذلك من أجل بيان لأي منهم يكون له أقل قيمة سالبة.

إن تفسير العلاقة $8 \le \lambda \le 10$ يعني أن الحدود المسموح بها تقع بين الأرقام 8 -10 ، ويمكن التعبير عن ذلك بصيغة أخرى، وذلك بعد أن نأخذ القيم $8 \le \lambda$ لغاية الرقم 10:

$$\lambda \ge 8$$

$$(1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \lambda = 8$$

(2) .... $\lambda \longrightarrow > 8$ (على سبيل المثال9)

وبعد التعويض في القيم λ 5 $-$ 40 و λ 3 + 10 - عن المجاهيل، يتضح أن المقدار الأول يكون له أقل قيمة سالبة، لذلك يقع الاختيار على العمود الأول كعمود حل وعلى الصف الأول X_2 بمثابة صف الحل. وبعد أن يتم تنفيذ المرحلة التالية من أسلوب Jordan Elimination يتم الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (3-29)

	$-X_2$	$-y_3$	1
$y_2=$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	10
$X_1=$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	60
$y_1=$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	90
$Z=$	$-20+\frac{5}{2}\lambda$	$10+\frac{1}{2}\lambda$	$1200 + 60\lambda$

على أساس ما تقدم تتم عملية الفحص والتحليل وذلك لبيان لأي قيم للعامل λ يمكن أن نحصل من الجدول أعلاه على الحل الأمثل، نأخذ القيم التالية:

$$(1) \;\ldots\ldots\ldots\ldots\quad -20 + \frac{5}{2}\lambda \longrightarrow \geq 0 \qquad 8 \leq \lambda$$

$$(2) \;\ldots\ldots\ldots\ldots 10 + \frac{1}{2}\lambda \longrightarrow \geq 0 \qquad -20 \leq \lambda$$

ومنه أن نستنتج أن: $8 \leq \lambda$

وعندما تكون $10 \leq \lambda \leq 8$ أو بالأحرى $8 \leq \lambda$ فإن من الجدول أعلاه يمكن أن نحصل على الحلول المثلى التالية:

$X_1 = 60 \qquad y_1 = 90$

$X_2 = 0 \qquad y_2 = 10$

$y_3 = 0$

وأن قيمة دالة الهدف Z تحسب كالآتي:

$$Z = 1200 + 60\lambda$$

إن الحل الأمثل تكون $8 \leq \lambda$ يتضح على أساس الشكل البياني (3–11) وذلك من النقطة A.

إن الحلول المثلى السابقة التي تم الحصول عليها [13 , 2] يمكن وضعها في الجدول التالي:

الجدول رقم (3–30) الحلول المثلى للمشكلة

المتغيرات / رقم الحل	(1) $0 \le \lambda \le \frac{10}{3}$	(2) $\frac{10}{3} \le \lambda \le 8$	(3) $8 \le \lambda \le 10$
X1	30	50	60
X1	40	20	0
X1	0	40	90
X1	0	0	10
X1	20	0	0
Z	$1800 - 50\lambda$	$1600 + 10\lambda$	$1200 + 60\lambda$

من الجدول السابق يتضح أن للقيم $0 \le \lambda \le \frac{10}{3}$ الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 30 \quad , \quad X_2 = 40 \quad Z_{max} = 1800 - 50\lambda$$

ويتضح أن للقيم $\frac{10}{3} \le \lambda \le 8$ الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 50 \quad , \quad X_2 = 20 \quad Z_{max} = 1600 - 10\lambda$$

ويتضح أن للقيم $8 \le \lambda \le 10$ الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 60 \quad , \quad X_2 = 0 \quad Z_{max} = 1200 - 60\lambda$$

ويلاحظ مما تقدم أن أفضل البدائل فائدة لمنظمة الأعمال قيد الدرس، هو عندما يكون الربح المتوقع للوحدة الواحدة من السلع A, B يتغير بين الحدود التالية:

1) عندما $\lambda \to 0$

2) عندما $\lambda \to 10$

وعندها أقصى ربح ممكن من الإنتاج يبلغ 1800 وحدة نقدية، وذلك كما يلي:

$$Z_{max} = 1800 - 50 \,.\, \lambda \qquad \text{عندما } \lambda = 0$$

$$= 1800 - 50 \,.\, 0$$

$$= 1800.$$

$$Z_{max} = 1200 + 60 \,.\, \lambda \qquad \text{عندما } \lambda = 10$$

$$= 1200 + 60 \,.\, 100$$

$$= 1200 + 600$$

$$= 1800.$$

أسئلة وتمارين الفصل الثالث

س1: ما هو المقصود بالنموذج المقابل في البرمجة الخطية وما أهميته في معالجة مشكلات الإنتاج؟

س2: باستخدام الطريقة البيانية حل المشكلة التالية:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad X_1+2X_2 \geq 8,\\
&(2)\quad X_1+X_2 \leq 8,\\
&(3)\quad -X_1+X_2 \leq 1,\\
&(4)\quad X_1-2X_2 \leq 4,\\
&(5)\quad 0\leq X_1 \leq 6,\\
&(6)\quad X_2 \geq 1,\\
&(7)\quad X(F_1, F_2)=\frac{-X_1+X_2-8}{X_1+X_2+4} \rightarrow Min
\end{aligned}
$$

النتائج النهائية:

$X_1 = 6$

$X_2 = 1$

س3: توفر لديك النموذح الرياضي التالي الذي يعبر عن مشكلة إنتاج نوعين من السلع:

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad X_1+2X_2 \geq 6,\\
&(2)\quad -X_1+X_2 \leq 3,\\
&(3)\quad 2X_1+X_2 \leq 12,\\
&(4)\quad X_1-X_2 \leq 4,\\
&(5)\quad H(X_1, X_2)=\frac{X_1-2X_2+2}{3X_1-X_2+6} \rightarrow Min
\end{aligned}
$$

المطلوب:

1. حل المشكلة باستخدام الطريقة البيانية.

2. ما هي قيمة دال الهدف المثلى

النتائج النهائية:

$1.\ X_1 = 5, X_2 = 2$

$2.\ H(X_1, X_2) = \frac{8}{19}$

س4: توفر لديك النموذج الرياضي التالي الذي يعبر عـن إحـدى مشـكلات الإنتاج في منظمة أعمال إنتاجية:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad X_1 - X_2 \leq 0,\\
&(2) \quad 2X_1 + X_2 \geq 6,\\
&(3) \quad X_1 + X_2 \leq 6,\\
&(4) \quad X_1 + X_2 \geq 5,\\
&(5) \quad X_1, X_2 \geq 0,\\
&(6) \quad G(X_1, X_2) = \frac{X_1 + 2X_2 + 3}{2X_1 + X_2 + 4} \rightarrow Min
\end{aligned}
$$

المطلوب:

1. حل المشكلة باستخدام (الطريقة البيانية).

2. ما هي قيمة الدالة $G(X^*_1 ، X^*_2)$.

النتائج النهائية:

$1.\ X_1 = 3,\ X_2 = 3$

$2.\ G(X_1, X_2) = \frac{6}{13}$

س5: توفر لديك النموذج الرياضي التالي الذي يعبر عن مشكلة إنتاج:

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad X_1 + X_2 \leq 2, \\
&(2) \quad -X_1 + X_2 \leq 5, \\
&(3) \quad X_1 + X_2 \geq 4, \\
&(4) \quad X_1 + X_2 \leq 8, \\
&(5) \quad X_1 + X_2 \leq 0, \\
&(6) \quad H(X_1, X_2) = \frac{\alpha X_1 - X_2 + 3}{X_1 + X_2 + 1} \rightarrow Min
\end{aligned}
$$

المطلوب:

ما هي قيمة المعامل α ، بحيث أن: (43-,) P0.

أوجد الحل الأمثل يأخذ بنظر الاعتبار ما ورد في النقطة (1).

ما هي قيمة المعامل α بحيث أن : (4,3-) P0.

أوجد الحل الأمثل الذي يأخذ بنظر الاعتبار ما ورد في النقط (3).

النتائج النهائية:

1. $\alpha = -\frac{7}{3}$

2. $X_1 = 1 \qquad X_2 = 3 \quad H(X_1, X_2) = -\frac{7}{15}$

3. $\alpha = 0$

4. $X_1 = 3 \quad , \quad X_2 = 1 \quad H(X_1, X_2) = \frac{2}{3}$

س6: شركة نفطية لديها مصفى لتكرير وإنتاج المشتقات النفطية المختلفة، تشتري هذه الشركة نوعين من خامات النفط وهي R_2 ، R_1 مقابل الأسعار (7) و (14) لكل وحدة واحدة، ومن هذه الخامات يتم طرح عدد من المنتجات وذلك كما هو واضح في الجدول التالي:

الخامات / المنتجات	الفيتامينات لكل منتج		مقدار ما هو مطلوب
	R1	R2	
البانزين	16	48	48000
الزيوت	20	10	2000
دهون	24	14	76000
الأسعار	7	14	

المطلوب:

1. ما هي قيمة الخامات R1 ، R2 الواجب شرائها لهذا الغرض.
2. حل النموذج بالطريقة البيانية.
3. أوجد نسبة استخدام الطاقة الإنتاجية للمصفى على أساس ما تم شرائه من خامات.

النتائج النهائية:

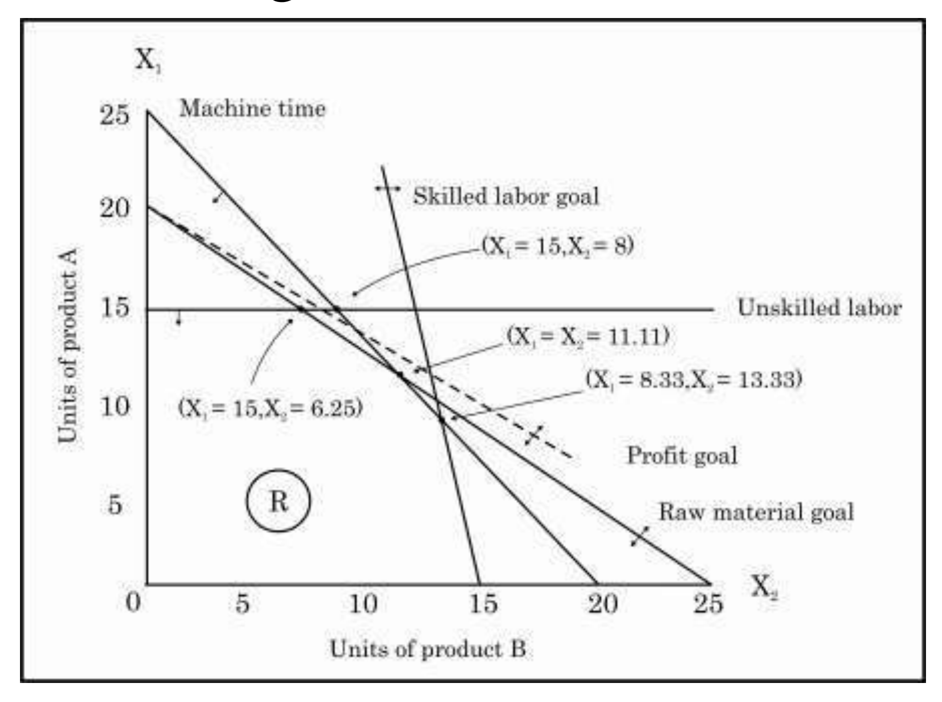
$X_1 = 600$

$X_2 = 800$

$F(X_1, X_2) = 15400$

يتم استخدام الطاقة الإتناجية بحدود 65٪

س7: الشكل البياني التالي يتعلق بإحدى مشكلات الإنتاج:



المطلوب: ما هو تفسيرك لمنطقة الحلول الممكنة (R).

س8: ما هي أهمية أسلوب Jordan Elimination في معالجة مشكلات البرمجة الخطية؟

س9: ما هو تفسيرك للعلاقة التالية:

$$\begin{matrix} \longrightarrow Max \\ \longrightarrow Min \end{matrix}\Big\} Max.\ H = \frac{H_1}{H_2}$$

س10: ما هو تفسيرك للعلاقة التالية:

$$\begin{matrix} \longrightarrow Min \\ \longrightarrow Max \end{matrix}\Big\} Min.\ H = \frac{H_1}{H_2}$$

الفصل الرابع
نماذج النقل في اتخاذ القرار الأمثل

4

الفصل الرابع

نماذج النقل Transportation Models في اتخاذ القرار الأمثل

لغرض توضيح نماذج النقل وبيان دورها وأهميتها في اتخاذ القرار الأمثل في منظمات الأعمال الإنتاجية والخدمية، ينبغي في البداية توضيح الصيغة الرياضية للنموذج العام لمشاكل النقل، التي هي بمثابة القاعدة الأساسية لبقية نماذج النقل، وذلك كما هو وارد أدناه.

1.4. النموذج الرياضي العام لمشاكل النقل

تستخدم نماذج النقل بالأساس في اتخاذ القرارات المتعلقة بعملية معالجة مشاكل نقل وتوزيع الموارد بين مراكز التوزيع ومراكز الاستلام. وتتصف هذه النماذج بكونها تستوعب متغيرات كثيرة العدد وتساعد في الحصول على الحل الأمثل المطلوب لمشكلة النقل. ويمكن استخدام هذه النماذج في معالجة مشاكل ليست بالضرورة مرتبطة بنقل بضائع ومواد من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام، بل يمكن استخدامها أيضاً في معالجة مشاكل إنتاجية وبالذات ما يتعلق منها بنقل وتحويل المواد الأولية والمواد نصف الجاهزة من خط إنتاجي معين إلى آخر لإكمال عملية الصنع.

لغرض بيان الصيغة العامة لنموذج النقل يتطلب الأمر في البداية توضيح بعض التعاريف التي لها علاقة بالصيغة العامة للنموذج المذكور وذلك كما يلي[1]:

---

(1) D. Rogalska. .,op. cit., pp. 197 .

1- التعاريف الأساسية

$m \leftarrow$ العدد الكلي لمراكز التوزيع

n $\leftarrow$ العدد الكلي لمراكز الاستلام

D_i (حيث أن: $i = 1 , 2 , \ ...., m$) $\leftarrow$ مركز التوزيع في الموقع رقم (i)

O_j (حيث أن: $j = 1 , 2 , \ ...., n$) $\leftarrow$ مركز التوزيع في الموقع رقم (j)

a_i (حيث أن: $i = 1 , 2 , \ ...., m$) $\leftarrow$ مقدار البضاعة أو المنتجات المعروضة في مركز التوزيع (i).

b_j (حيث أن: $j = 1 , 2 , \ ...., n$) $\leftarrow$ مقدار البضـاعة أو المنتجـات المطلوبـة من قبل مركز التوزيع (i).

C_{ij} (حيث أن: $\begin{bmatrix} i = 1 , 2 ,....., m \\ j = 1 , 2 ,....., n \end{bmatrix}$) $\leftarrow$ تكاليف نقـل الوحـدة الواحـدة من المنتجات[1].

وذلك : من i – مركز توزيع

إلى j – مركز استلام

X_{ij} (حيث أن: $\begin{bmatrix} i = 1 , 2 ,....., m \\ j = 1 , 2 ,....., n \end{bmatrix}$) $\leftarrow$ كمية الإنتاج المنقول بين مراكـز التوزيع والاستلام.

---

(1) تم اعتماد مصطلح المنتجات المنقولة فقط لغرض حصر المشكلة.

وذلك : من i – مركز توزيع

إلى j – مركز استلام

مما تقدم نستنتج أن العوامل الداخلة في تركيب نماذج النقل هـي $[a_i, b_j, C_{ij}]$ وإن المتغير الأساسي المطلوب إيجاد قيمته هو X_{ij}.

حيث أن: $X_{ij} \geq 0$

2- جدول النقل Transportation Table

إن الصيغة العامة لجدول النقل هو كما يلي(1):

جدول (4-1) الصيغة العامة لجدول النقل

مراكز التوزيع ⇓	مراكز الاستلام				a_i
	O_1	O_2	…	O_n	
D_1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	…	C_{1n} X_{1n}	a_1
D_2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	…	C_{2n} X_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	…	⋮	⋮
D_m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…	C_{mn} X_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i}^{m} a_i$ / $\sum_{j}^{n} b_j$

(1) D. Rogaliska. .,op. cit., pp. 198 .

إن العناصر الأساسية لجدول النقل الموضح في (4-1) هي كما يلي:

1- مصفوفة النقل أو ما يسمى بخطة النقل (ويعرف أيضاً بالبدائل الممكنة للنقل)

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \dots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \dots & X_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_{m1} & X_{m2} & \dots & X_{mn} \end{bmatrix}$$

2- مصفوفة التكاليف للوحدة الواحدة

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mn} \end{bmatrix}$$

3- عمود المصفوفة الذي يوضح كمية الإنتاج المعروض في مراكز التوزيع

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

4- صف المصفوفة الذي يدل على حجم الطلب على الإنتاج عند مراكز الاستلام $b = [b_1, b_2, \dots, b_n]$.

3- البدائل الممكنة للنقل (خطة النقل الممكنة)

ضمن إطار النقل يمكن تعريف البدائل الممكنة للنقل بأنها مصفوفة النقل X_{ij}(حيث أن: ($i = 1 , 2 , ..., m, \quad j = 1 , 2 , \dots, n$) التي تقدم توضيحاً لكافة مسارات النقل الممكنة مع بيان لكميات المنتجات المنقولة بين مراكز الاستلام والتوزيع وفقاً لتكاليف محددة لكل مسار من مسارات النقل المذكورة. ويفترض أن تكون بدائل النقل الممكنة خالية من القيم السالبة، أي أن:

$$X_{ij} \geq 0$$

هناك شروط معينة يفترض تحققها عند اعتماد المصفوفة X_{ij} لاتخاذ القرار الأمثل في اختيار بدائل النقل الممكنة، وهذه الشروط هي:

أ- توازن كمية الإنتاج المعروض مع الطلب.

- كمية الإنتاج المنقول يساوي ما هو معروض.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i$$

(حيث أن : $i = 1 , 2 , \dots, m$)

- كمية الإنتاج المنقول يساوي ما هو مطلوب.

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j$$

(حيث أن : $j = 1 , 2 , \dots, n$)

ب- عندما يكون الإنتاج المعروض أكبر من الكمية المنقولة

- كمية الإنتاج المنقول أقل ما هو معروض.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} < a_j$$

(حيث أن : i = 1 , 2 , ..., m)

- كمية الإنتاج المنقول تسد حاجة الطلب.

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = b_i$$

(حيث أن : j = 1 , 2 , ..., n)

جـ- عندما يكون الإنتاج المطلوب أكبر من الكمية المنقولة

- كمية الإنتاج المنقول أقل مما هو مطلوب

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} < b_j$$

(حيث أن : j = 1 , 2 , ..., n)

- كمية الإنتاج المنقول تساوي ما هو معروض.

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i$$

(حيث أن : i = 1 , 2 , ..., m)

4- البديل الأمثل Optimal Alternative

ويعرف أيضاً بخطة النقل المثلى الذي عنده تكون قيمة دالة الهدف Z (X) أقل ما يمكن، حيث أن هذه الدالة تمثل التكاليف الكلية المترتبة على نقل البضائع من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام. إن العلاقة الرياضية للدالة المذكورة هي كما يلي:

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \longrightarrow Min$$

حيث أن:

$i = 1, 2, ..., m$

$j = 1, 2, ..., n$

في إطار تحديد البديل الأمثل لا بد من ذكر الملاحظات التالية:

ملاحظة رقم (1): إذا كانت خطة النقل ممكنة، وكان فيها، مجموع الطلب يساوي مجموع العرض، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$$

فإن خطة النقل هذه تسمى بخطة النقل المغلق، وهي تحقق الشروط الواردة في النقطة (أ) أعلاه.

ملاحظة رقم (2): إذا كانت خطة النقل ممكنة، وكان فيها مجموع الطلب لا يتفق مع مجموع العرض، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

فإن خطة النقل هذه تسمى بخطة النقل المفتوح[1]، وهي تحقق الشروط الواردة في التقاط (ب ، جـ) السابق ذكرها أعلاه.

ويمكن صياغة النموذج الرياضي لمشكلة النقل بشكل عام، وذلك كما يلي:

المطلوب: اجعل قيمة دالة الهدف تصل إلى أقل قيمة ممكنة لها، أي أن:

$$(1) \qquad Z(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \longrightarrow Min$$

مع تحقق الشروط التالية:

العرض (حيث أن : $i = 1, 2, \ldots, m$) $\quad \sum_{j=1}^{n} X_{ij} = a_i \qquad (2)$

الطلب (حيث أن : $j = 1, 2, \ldots, n$) $\quad \sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \qquad (3)$

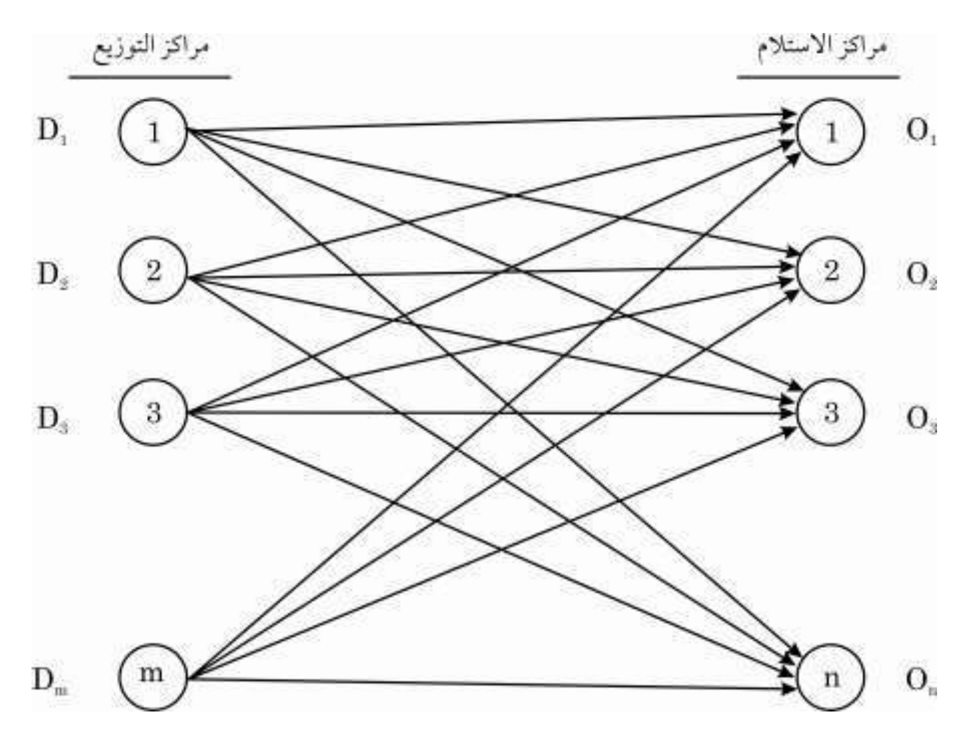
$$(4) \qquad X_{ij} \geq 0 \left[\begin{matrix} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{matrix} \text{ :حيث أن} \right]$$

إن مسارات النقل التي تعبر عن هذا النموذج هي كالآتي:

---

(1) في هذه الحالة يتطلب الأمر افتراض مركز استلام وهمي أو مركز توزيع وهمي وحسب طبيعة المشكلة لكي تتم عملية الموازنة. وسوف نأتي على توضيح ذلك لاحقاً.

شكل (4-1) مسارات النقل



لغـرض توضـيح فكـرة نـماذج النقـل، نعـرض أدنـاه بعـض المشـكلات والتطبيقات العملية على ذلك.

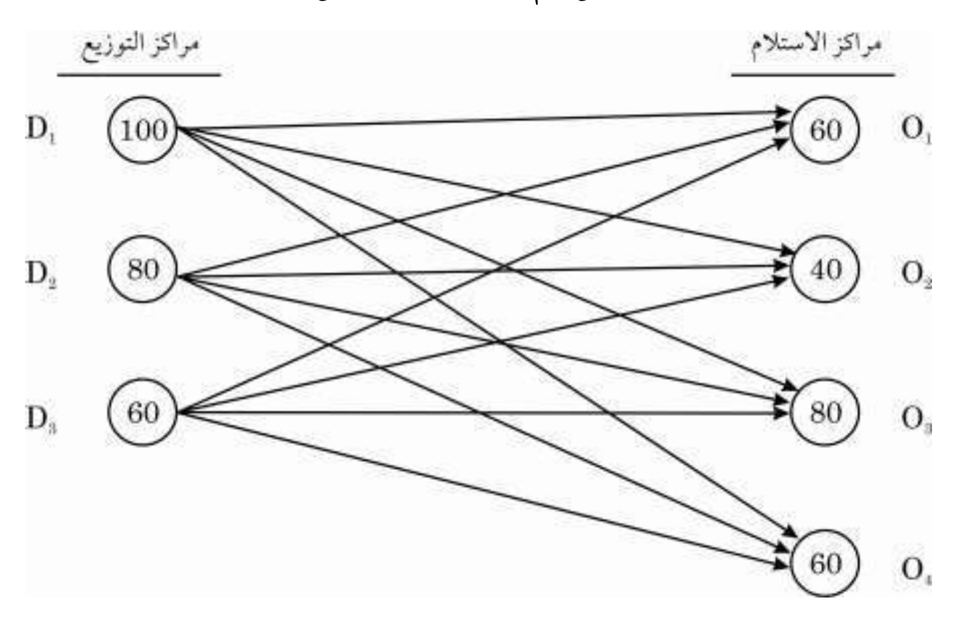
المشكلة رقم (1): منظمة أعمال تجارية ترغب في تسـويق منتجاتها مـن مخازنها الثلاث إلى أربعة وكلاء هم على التـوالي (الوكيـل 1، الوكيـل 2، الوكيـل 3، الوكيل 4، المعلومات المتعلقة بتكاليف النقل وكمية الإنتاج المطلوب وكمية الإنتاج المعروض تتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-2) بيانات المشكلة

الوكلاء / المخازن	الوكيل رقم 1 O_1	الوكيل رقم 2 O_2	الوكيل رقم 3 O_3	الوكيل رقم 4 O_4	العرض a_i
المخزن رقم 1 D_1	$C_1 = 4$	$C_2 = 8$	$C_3 = 5$	$C_4 = 10$	$a_1 = 100$
المخزن رقم 2 D_2	$C_{21} = 8$	$C_{22} = 12$	$C_{23} = 6$	$C_{24} = 18$	$a_2 = 80$
المخزن رقم 3 D_3	$C_{31} = 7$	$C_{32} = 9$	$C_{33} = 11$	$C_{34} = 20$	$a_3 = 60$
الطلب bj	$b_1 = 60$	$b_2 = 40$	$b_3 = 80$	$b_4 = 40$	240 / 240

مسارات النقل للمشكلة تتضح من خلال الشكل التالي:

الشكل رقم (4-2) مسارات النقل



المطلوب: طلبت المنظمة من إدارة التسويق والنقل وضع خطة لتسويق الإنتاج بحيث تكون تكاليف النقل الكلية أقل ما يمكن.

الحل: من الجدول (4-2) يمكن استنتاج مصفوفة التكاليف C التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 5 & 10 \\ 8 & 12 & 6 & 18 \\ 7 & 9 & 11 & 20 \end{bmatrix}$$

حيث ينبغي في ضوء هذه المصفوفة اتخاذ قراراً لتحديد كميات البضاعة المنقولة من المخازن الثلاث إلى الوكلاء الأربع.

ولو تم افتراض X_{ij} هو كمية الإنتاج المنقول من المخزن D_i إلى الوكيل O_j (حيث أن: 4 .., 2 , 1 = j ,... , 3 , , 2 , 1 = i)، فإن كمية الإنتاج الذي ينبغي أن يجهز من المخازن إلى الوكلاء يمكن التعبير عنه من خلال المصفوفة التالية:

$$X_{ij} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \end{bmatrix}$$

حيث أن: i = 1 , 2 , 3

j = 1 , 2, , 3 , 4

من الجدول (4-2) يتضح أن:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j$$

حيث أن : 100 + 80 + 60 = 240 العرض

60 + 40 + 80 + 60 = 240 الطلب

لذلك فإن هذا النوع من المشاكل يطلق عليه اسم مشاكل النقل المغلق. حيث أن فيه مجموع الكميات المرسلة يساوي مجموع الكميات المعروضة في كل مركز توزيع، أي أن:

$$(1)\quad \begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} &= a_1 = 100 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} &= a_2 = 80 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} &= a_3 = 60 \end{aligned}$$

وهذا يسمى بشروط مراكز التوزيع.

أما بالنسبة لمجموع الكميات المستلمة من قبل أي وكيل فهي بالتأكيد تساوي الحاجة الكلية للوكيل من البضاعة المذكورة، أي أن:

$$(2)\quad \begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{31} &= b_1 = 60 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} &= b_2 = 40 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} &= b_3 = 80 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} &= b_4 = 60 \end{aligned}$$

وهو ما يسمى بشروط مراكز الاستلام.

إن دالة الهدف المطلوبة عند حل المشكلة هذه، تقوم على أساس جعل تكاليف نقل البضاعة المنتجة من المخازن إلى الوكلاء أقل ما يمكن، أي أن:

$$\begin{aligned} Z(X) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} C_{ij}\, X_{ij} = {} & C_{11} + X_{11} + C_{12} + X_{12} + C_{13} + X_{13} + C_{14} + X_{14} + C_{21} + X_{21} \\ & + C_{22} + X_{22} + C_{23} + X_{23} + C_{24} + X_{24} + C_{31} + X_{31} \\ & + C_{32} + X_{32} + C_{33} + X_{33}\ C_{34} + X_{34} \longrightarrow Min \end{aligned}$$

عليه فإن:

$$\begin{aligned} Z(X) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} C_{ih}\, X_{ij} = {} & 4X_{11} + 8X_{12} + 5X_{13} + 10X_{14} + 8X_{21} + 12_{22} \\ & + 6X_{23} + 18X_{24} + 7X_{31} + 9X_{32} + 11X_{33} \\ & + 20X_{34} \longrightarrow Min \end{aligned}$$

2.4. تحديد خطة النقل المثلى في مشاكل النقل المغلق

إن المتغير X_{ij} (حيث أن: $i = 1 , 2,..., M, \ j = 1 , 2,..., N$) هو القيمة المجهولة في النموذج الرياضي لمشكلة النقل. وينبغي التعويض عنها بما هو متوفر من بيانات حتى يمكن الحصول على النتائج النهائية. وبشكل عام أن حل نماذج النقل يتم على مرحلتين في المرحلة الأولى يجري البحث عن أي حل ممكن للمشكلة باستخدام أحد الطرق التالية[1]:

أولاً: مرحلة الحل الممكن الابتدائي

1- طريقة الركن الشمالي الغربي North – West Corner Method.

2- الطريقة العشوائية Random Method.

ثانياً: مرحلة الحل الأفضل

الحل الأفضل يتم الحصول عليه باستخدام أحد الطرق التالية:

1- طريقة العنصر الأقل كلفة Least Cost Method.

2- طريقة فوجل Vogel's Method.

بعد الحصول على الحل الابتدائي الممكن والحل الأفضل للمشكلة، تبدأ المرحلة النهائية التي بموجبها يجري تحسين الحل الأفضل وذلك بحثاً عن الحل الأمثل للمشكلة، ويتم ذلك باستخدام أحد الطرق التالية:

---

(1) D. Rogaliska. .,op. cit., 296 .

1- طريقة فورد – فلكورسن Ford- Foulkerson Method.

2- طريقة التوزيع المعدل مع المسار المتعرج

The Modified Distribution Method (With Stepping Stone)

لغرض بيان فكرة هذه الطرق، فإنه في بادئ الأمر يجري تحديد الحل الابتدائي (الأساسي) الممكن، مع التركيز على الطريقة الأولى في كل من المرحلة الأولى والثانية لكونهما من الطرق الشائعة والمهمة، وفي المرحلة النهائية يتم إيجاد الحل الأمثل، مع التركيز على الطريقة الأولى لنفس السبب السابق.

أولاً: مرحلة الحل الممكن الابتدائي:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي North – West Corner Method

وهي من أكثر الطرق الرياضية شيوعاً التي لا تحتاج إلى تكنيك رياضي عالي في الحل. وفكرة هذه الطريقة تقوم على أساس البدء بحل المشكلة من الربع الأول في جدول النقل (والذي يسمى أيضاً بخلية النقل) الذي يقع في الجزء الشمالي الغربي من الجدول المذكور. ويتم اعتماد القيم a_i , b_j كمؤشر في عملية التوزيع للبضائع والمنتجات بين مراكز التوزيع والاستلام. حيث إذا كانت $a_j > b_j$ فإن اتجاه التوزيع في جدول النقل يكون أفقياً. وإذا كانت $a_i > b_j$ فإن اتجاه التوزيع يكون عمودياً. وهكذا تستمر العملية لغاية آخر مربع موجود في جدول النقل. حيث إذا تم إشباع حاجة كافة مراكز الاستلام بما هو متوفر من موارد في مراكز التوزيع، وهو ما يعني بلوغ النتائج النهائية للمشكلة. ويمكن أن تتم هذه العملية باعتماد العلاقة الرياضية التالية [1]:

(1) D. Rogaliska. .,op. cit., pp. 298 .

$b_{ij} = Min\ (a_i\ , b_j)$

حيث أن: $i = 1\ , 2\ , \ ....,\ m$

$j = 1\ , 2\ ,...,\ n$

وتكـــون بدايـــة تطبيـــق هـــذه العلاقـــة مـــن الربـــع الأول في الجـــدول، والـــذي يمثـــل مقـــدار مـــا مطلـــوب تســـويقه مـــن بضـــاعة مـــن المخـــزن الأول إلى الوكيل الأول.

يؤخذ على طريقة الركن الشمالي الغربي كونها لا تأخذ بنظر الاعتبار تكـاليف لنقل بين المسارات. حيث أن المهم طبقاً لهذه الطريقة إشـباع الحاجـة أو الطلـب على البضاعة في مراكز الاستلام وليس المهم هنا كلفـة مسـار النقـل، وفـيما يـلي توضيح لفكرة الطريقة على أساس بيانات المشكلة السابقة.

إن نقطة البداية في حل هذه المشكلة هو الربع الأول من الجدول الذي يحـوي المتغير X_{11} والذي يقع في الركن الشمالي الغربي من جـدول النقـل، ويمثـل هـذا المتغـير كميـة البضـاعة المطلـوب نقلهـا مـن المخـزن الأول إلى الوكيـل الأول. ولتوضيح هذه الفكرة يتطلب الأمر تنظيم الجدول التالي:

جدول رقم (4-3) بيانات المشكلة

الوكلاء / المخازن	الوكيل رقم 1 O_1	الوكيل رقم 2 O_2	الوكيل رقم 3 O_3	الوكيل رقم 4 O_4	العرض a_i	
المخزون رقم 1	60	40	0	0	$a_1 = 100$	40 0
المخزون رقم 2	0	0	80	0	$a_2 = 80$	0
المخزون رقم 3	0	0	0	60	$a_2 = 60$	0
الطلب b_j	$b_1 = 60$	$b_2 = 40$	$b_3 = 80$	$b_4 = 60$	240 \ 240	
	0	0	0	0		

وقد تمت عمليات النقل كما يلي:

من المخزن رقم (1) يتم إرسال 60 وحدة إلى الوكيل رقم (1) أي أن:

$X_{11} = 60$

لذلك فإن حاجة الوكيل رقم (1) قد تم تلبيتها بالكامل، في حين بقي في المخزن رقم (1) 40 وحدة. ولما كان $a_i > b_j$ لذلك نستمر بالتوزيع أفقياً[1]، إن حاجة الوكيل 40 وحدة وإن مقدار ما هو موجود في المخزن الأول هو 40 وحدة (أي أن: $X_{12} = 40$) وبذلك يتم إشباع حاجة الوكيل الثاني وبذلك تنفذ البضاعة الموجودة في المخزن رقم(1).

بعد ذلك تبدأ عملية التجهز من المخزن رقم (2). إذ يتم توزيع ما موجود فيه من بضاعة إلى الوكيل رقم (3)، حيث إن حاجة الوكيل رقم (1) ورقم (2) قد أشبعت. إن حاجة الوكيل رقم (3) هي 80 وحدة (أي أن: $X_{23} = 80$) وبذلك يكون الأمر محسوماً.

من المخزن رقم (3) يتم التجهيز هذه المرة. حيث يتم إرسال 60 وحدة، وهي تساوي مقدار حاجة الوكيل الرابع (أي أن: $X_{34} = 60$) [2].

وعليه فإن قيمة دالة الهدف تحسب كما يلي:

$$Z(X) = 60 . 4 + 40 . 8 + 80 . 6 + 60 . 20$$
$$= 240 + 320 + 480 + 1200$$

التكاليف المطلوبة للنقل = 2240 ديناراً

(1) إذا كان $a1 > b1$ يكون اتجاه التوزيع أفقياً، وإذا كان $b1 > a1$ يكون اتجاه التوزيع عمودياً.

(2) إن اتجاهات عمليات التوزيع في الجدول (4 – 3) في النهاية تأخذ شكل السلم.

ولو تم تطبيق العلاقة الرياضية: $b_{ij} = \text{Min}\ [a_i\ ,\ b_j]$ فإننا سوف نحصل على نفس النتائج التي تم الحصول عليها في الجدول (4-3) وذلك كما يلي:

المخازن \ الوكلاء	الوكيل رقم 1 O_1	الوكيل رقم 2 O_2	الوكيل رقم 3 O_3	الوكيل رقم 4 O_4	العرض a_i
D_1 المخزن رقم 1	60	40	0	0	$a_1 = 100$
D_1 المخزن رقم 1	60	40	0	0	$a_1 = 100$
D_1 المخزن رقم 1	60	40	0	0	$a_1 = 100$
الطلب b_j	$b_1 = 60$	$b_2 = 40$	$b_3 = 80$	$b_4 = 60$	240 \ 240

وقد تمت عمليات الحساب كما يلي:

المخزن رقم (1)

$$\begin{aligned} X_{11} &= Min[100,60] = 60 \\ X_{12} &= Min[40,40] = 40 \\ X_{13} &= Min[0,80] \quad = \quad 0 \\ X_{14} &= Min[0,60] \quad = \quad 0 \end{aligned}$$

المخزن رقم (2)

$$\begin{aligned} X_{21} &= Min[80,0] = 0 \\ X_{22} &= Min[80,0] = 0 \\ X_{23} &= Min[80,0] = 80 \\ X_{24} &= Min[0,60] = 0 \end{aligned}$$

المخزن رقم (3)

$$X_{31} = Min[60,0] = 0$$
$$X_{32} = Min[60,0] = 0$$
$$X_{33} = Min[60,0] = 0$$
$$X_{34} = Min[60,60] = 60$$

وعليه فإن قيمة دالة الهدف تحسب كما يلي:

$$Z(X) = 60 . 4 + 40 . 8 + 80 . 6 + 60 . 20$$
$$= 240 + 320 + 480 + 1200$$

التكاليف الكلية للنقل= 2240 ديناراً

ثانياً: مرحلة الحل الأفضل:

1- طريقة العنصر الأقل كلفة Least Cost Method

بموجب هذه الطريقة تتم عملية التوزيع للبضاعة الموجودة في مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام وبالاعتماد على عامل الكلفة بالنسبة لكل مسار من مسارات النقل الممكنة. حيث تتم عمليات توزيع كميات البضاعة المتوفرة وإرسالها إلى مركز الاستلام ابتداءاً من المربع الذي يحوي أقل كلفة نقل. وبعد نفاذ الكمية من البضاعة المتوفرة في مركز التوزيع ذو الكلفة الأقل، تجري عملية البحث عن مربع آخر ذات كلفة أقل وهكذا.

لقد تم برمجة تنظيم إجراءات الحل وفقاً للفكرة أعلاه ذلك بالاعتماد على مصفوفة التكاليفية C_{ij}. حيث يرمز للصيغة الابتدائية لهذه المصفوفة بالرمز C. ويتم تحوير هذه المصفوفة بما يخدم إجراءات الحل وذلك كما هو واضح في المخطط الانسيابي التالي[1]:

(1) H. KRYNSKi , A. BADACH ,.op. cit., pp. 197 .

الشكل رقم (4-3) المخطط الانسيابي لتحوير مصفوفة التكاليف C

من كل عناصر أي صف من صفوف المصفوفة C يتم طرح أقل عنصر موجود في الصف المذكور عند ذلك نحصل على المصفوفة: $\mathbf{C^0}$

↓

من كل عناصر أي عمود من أعمدة المصفوفة C^0 يتم طرح أقل عنصر موجود في العمود المذكور عند ذلك نحصل على المصفوفة: $\mathbf{C^1}$

تتصف المصفوفة C^1 التي يتم الحصول عليها بعد تطبيق المخطط الانسيابي (4-3) بأن فيها على الأقل صفر واحد سوف يظهر في كل صف وفي كل عمود. وينطبق على هذه المصفوفة نص النظرية التالية[1]:

نظرية عامة: إن مجموع التكاليف الكلية للنقل تكون أقل ما يمكن، إذا كانت عملية النقل للكميات من البضاعة التي مقدارها X_{ij} (حيث أن: $X_{ij} \geq 0$) تتم في المربعات (j , i) التي تحمل القيمة صفر في مصفوفة التكاليف C^L (حيث أن: $L = 1 , 2, \ldots$).

بعد تهيئة المصفوفة C^1 فإن تنفيذ عملية النقل والتوزيع للكميات المتوفرة من البضاعة حسب طريقة العنصر الأقل كلفة، تتم طبعاً للمخطط الانسيابي الموضح بالشكل رقم (4-4).

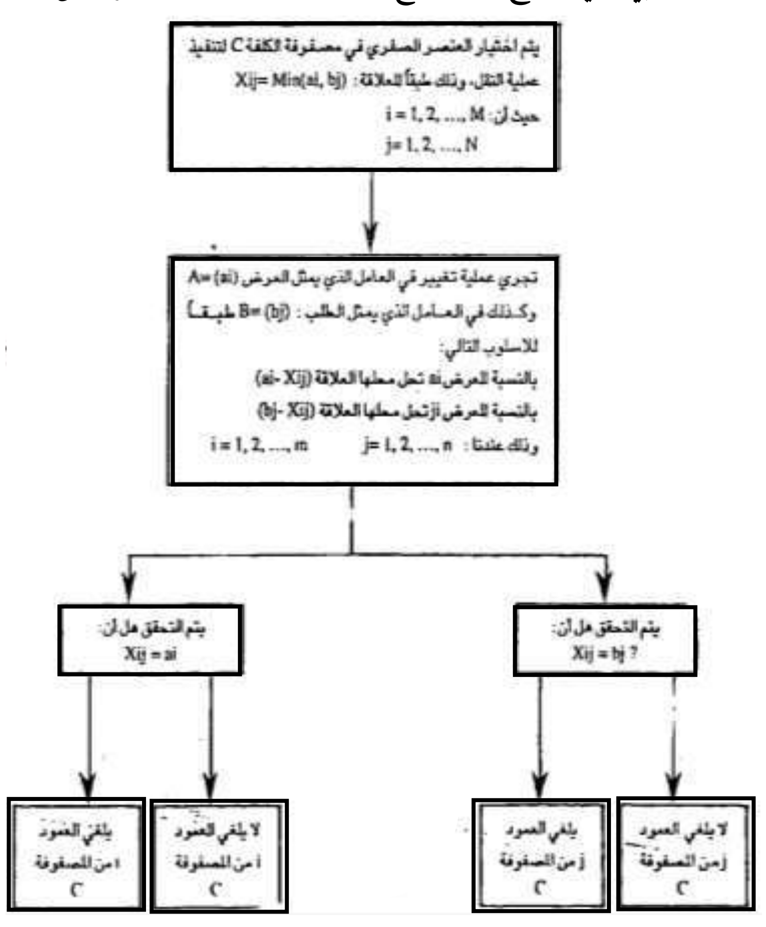
---

(1) H. KRYNSKi , A. BADACH ,.op. cit., pp. 163 .

لتوضيح فكرة الحل بطريقة العنصر الأقل كلفة لمعالجة مشاكل النقل طبقاً للمخططات الانسيابي (4–3) وكذلك (4–4) نعرض أدناه المشكلة التالية:

الشكل رقم (4–4)

المخطط الانسيابي الذي يوضح كيفية توزيع البضاعة حسب طريقة العنصر الأقل كلفة[1]



---

(1) إذا كان في مرحلة معينة من حل تنفيذ المخطط الانسيابي إن قيمة معينة من عوامل العرض (ai) تساوي قيمة معينة من الطلب (bj)، فإن في المراحل التالية يتم تجاوز العمود والصف الذي يتواجد فيهما عنصر المساواة المذكور. لمزيد من التفاصيل، انظر:

H. KRYNSKi , A. BADACH ,.op. cit., pp. 164.

مشكلة رقم (1): من ثلاث مواقع إنتاجية Z_1 , Z_2 , Z_3 يجري تسويق بضاعة إلى ثلاث مراكز بيع وهي على التوالي S_1 , S_2 , S_3 . إن تكاليف نقل الوحدة الواحدة وذلك من البضاعة المنتجة في المواقع الإنتاجية، وكمية البضاعة المطلوبة والمعروضة موضحة في الجدول التالي:

جدول رقم (4-5) بيانات المشكلة

المواقع الإنتاجية	مراكز البيع			كمية البضاعة المعروضة
	S_1	S_2	S_3	a_i
Z_1	5	3	8	14 طن
Z_2	6	4	11	4 طن
Z_3	10	6	9	19 طن
b_j الطلب على البضاعة	17 طن	11 طن	9 طن	37 / 37

المطلوب: طلبت المنظمة من إدارة التسويق والنقل دراسة المشكلة من أجل وضع خطة نقل مثلى للبضاعة بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن.

الحل: نفرض أن X_{ij} (حيث أن : $i , j = 1 , 2 , ...,$) هو كمية البضاعة المنقولة من الموقع الإنتاجي إلى مركز البيع j.

وبما أن: $a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3$ وهو يعني أن مجموع كمية البضاعة المعروضة تساوي مجموع كمية البضاعة المطلوبة، فإن مشكلة النقل قيد الدرس تعتبر من مشاكل النقل المغلق. ومن الجدول (4-5) نجد أن مصفوفة التكاليف C هي كما يلي:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 6 & 4 & 11 \\ 10 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

وبالاعتماد على المخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-4) ومنطوق النظرية العامة السالفة الذكر نحصل على المصفوفة C^o والمصفوفة C^1 وذلك كما يلي:

$$C^o = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

الخطوة التالية هو إفراغ عناصر المصفوفة C_1 في جدول النقل وذلك كما يلي:

جدول رقم (4-6)

مراكز الطلب / المواقع الإنتاجية	S_1	S_2	S_3	كمية البضاعة المعروضة a_i
Z_1	0	0	2	14
Z_2	0	0	4	4
Z_3	2	0	0	19
الطلب على البضاعة b_j	17	11	9	37 / 37

يتم تنفيذ عملية النقل على أساس المخطط الانسيابي (4-4) وعلى أساس مصفوفة التكاليف C^1 الموجودة في الجدول (4-6) حيث تبدأ عملية النقل في أحد المربعات الصفرية وليكن ذلك المربع الذي يحوي المتغير X_{11}، أي أن:

$$X_{11} = Min\ (14, 17) = 14$$

بعد أن يتم نقل 14 وحدة من البضاعة من موقع الإنتاج Z_1 إلى مركز الاستلام (الطلب) S_1 فإن موقع الإنتاج Z_1 سوف يفرغ من البضاعة. أما مركز الاستلام فإنه يبقى بحاجة إلى 3 وحدات.

يتم طرح الصف الذي يحوي Z_1 من هيكل الجدول (4-6)، حيث يصبح هذا الأخير كما يلي:

جدول رقم (4-7)

مراكز الطلب / المواقع الإنتاجية	S_1	S_2	S_3	كمية البضاعة المعروضة a_i
Z_1	0	0	4	14
Z_2	2	0	0	19
الطلب b_j	3	11	9	23 / 23

الخطوة التالية هي تنفيذ عملية النقل للبضاعة طبقاً للمسار المتجه من موقع الإنتاج Z_2 إلى مركز الطلب S_1 أي أن:

$$X_{21} = Min\ (4,3) = 3$$

وبموجب ذلك يتبقى في الموقع الإنتاجي Z_2 وحدة واحدة فقط (أي:1 = 3-4) في حين أن الطلب في المركز S1 قد تم إشباعه بالكامل، ويتم طرح العمود الذي يحوي المركز S_1 وبذلك نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (4-8)

مراكز الطلب / المواقع الإنتاجية	S_2	S_3	العرض a_i
Z_2	0	4	1
Z_3	0	0	19
الطلب b_j	11	9	20 / 20

بعد ذلك يستمر نقل البضاعة استناداً إلى المسار المتجه من مواقع الإنتاج Z_2 إلى مركز البيع S_2، أي أن: $X_{22} = Min\ (1,11) = 1$

وبذلك تصبح البضاعة المعروضة في موقع الإنتاج Z_2 صفراً. في حين أن الطلب في مركز البيع S_2 يصبح 10. ويتم طرح الصف الذي يحوي موقع الإنتاج Z_2 ونحصل بعدها على الجدول التالي:

جدول رقم (4-9)

العرض a_i	S_3	S_2	مراكز الطلب / المواقع الإنتاجية
19	0	0	Z_3
19 / 19	9	10	الطلب b_j

على أساس الجدول (4-9) يتم تحويل ما موجود من البضائع من موقع الإنتاج Z_3 إلى مراكز البيع S2 (أي أن: $X_{32} = 0$) وكذلك من موقع الإنتاج Z_3 إلى مركز البيع S_3 (أي أن: $X_{33} = 9$) ويمكن جمع كافة عمليات النقل الآنفة الذكر في إطار جدول النقل وكما يلي:

جدول رقم (4-10) النتائج النهائية لعملية نقل البضاعة

العرض a_i	مراكز البيع			المواقع الإنتاجية
S_3	S_2		S_1	
14	(8) 0	(3) 0	(5) 14	Z_1
4	(11) 0	(4) 1	(6) 3	Z_2
19	(9) 9	(6) 10	(10) 0	Z_3
37 / 37	9	11	17	الطلب b_j

إن نقل البضاعة كما هو ذكر وفي الجدول (4-10) يمثل الحل الأفضل للمشكلة. كما أن دالة الهدف في ظل هذا الحل أقل ما يمكن، أي أن:

التكاليف الكلية للنقل =

$Z(X) = 14X5 + 0X3 + 0X8 + 3X6 + 1X4 + 0X11 + 0X10 + 10X6 + 9X9 = 233$ ديناراً

مشكلة رقم (2): منظمة أعمال تجارية تملك اثنين من المخازن A , A مطلوب منها تجهيز بضاعة معينة إلى ثلاث مراكز بيع B_1 , B_2 , B_3 ، في المخزن A_1 يوجد 200 طن، وفي المخزن A_2 يوجد 160 طن من البضائع. أما حاجة مراكز البيع فهي على التوالي 130طن، 90 طن، 140 طن، تكاليف نقل البضاعة من المخازن إلى مراكز البيع موضحة في المصفوفة التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

طلبت المنظمة من إدارة التسويق والنقل دراسة المشكلة لتحديد أفضل خطة تجهيز للبضاعة بحيث تكون تكاليف النقل الكلية أقل ما يمكن.

الحل: نفرض أن حجم البضاعة المنقولة هو X_{ij} (حيث أن: $i = 1, 2, \ldots, j = 1, 2, 3$) وذلك من المخزن (i) إلى مركز التوزيع (j) البيانات التي تتعلق بالمشكلة يمكن عرضها من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (11.4) بيانات المشكلة

المخازن / مركز البيع	B_1	B_2	B_3	العرض a_i
A_1	6	4	2	200
A_2	5	3	2	160
الطلب b_j	140	90	130	360 / 360

ولما كان الطلب في مراكز البيع يساوي العرض في المخازن، فإن المشكلة تعتبر من مشاكل النقل المغلق. وبالاستناد إلى منطوق النظرية العامة التي تنص على تكوين في كل عمود وفي كل صف من المصفوفة C على الأقل صفر واحد، وبالاستناد إلى المخطط الانسيابي الموضح في الشكل (4-4) فإنه يكون لدينا ما يلي:

بعد تحوير الأعمدة   بعد تحوير الصفوف   المصفوفة الأصلية

$$C=\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 5 & 3 & 2\end{bmatrix}\longrightarrow C^{o}=\begin{bmatrix}4 & 2 & 0\\ 3 & 1 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow C^{1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

إن مجموع تكاليف النقل سوف تكون أقل ما يمكن، إذا كانت عمليات النقل $Xij > 0$ تتم في المربعات التي فيها أصفار كما هو واضح في مصفوفة التكاليف C^1 حيث عندها سوف نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (4-12) النتائج النهائية للمشكلة

المخازن الرئيسية \ مراكز البيع	B_1	B_2	B_3	العرض a_i	القيم المعدلة	
A_1	1 0	1 70	0 130	$a_1 = 200$	70	0
A_2	0 140	0 20	0 0	$a_2 = 160$	20	0
الطلب b_j	$b_1 = 140$	$b_1 = 90$	$b_1 = 130$	360 \ 360		
	0	0	0			
القيم المعدلة	0	0	0			

وقد تم الحصول على النتائج النهائية للمشكلة طبقاً للعمليات التالية:

$$X_{31} = Min\ [130, 200] = 130$$

ويتم إهمال B_3 العمود، وذلك لأن القيمة للمتغير b_3 أصبحت صفراً (أي أن: $b_3 = 0$)

$$X_{21} = Min\ [140, 160] = 140$$

يتم إهمال B_1 العمود، وذلك لأن القيمة للمتغير b_1 أصبحت صفراً (أي أن $b_1 = 0$).

يتم إهمال A_2، ، حيث أن القيمة للمتغير a_2 وأصبحت صفراً (أي أن $a_2 = 0$) وذلك في المرحلة الثانية من التعديلات.

وأخيراً نحصل على قيمة دالة الهدف وذلك كما يلي:

$$Z(X) = 6 X 0 + 4 X 70 + 2 X 130 + 5 X 140 + 3 X 20 + 2 X 0$$

التكاليف الكلية للنقل دينار $Z(X) = 1300$

2- طريقة فوجل Vogel's Method

تعتبر طريقة فوجل من الطرق المهمة التي تستخدم في تحديد الحل الأفضل للمشكلة المتعلقة بنقل بضاعة من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام إلا أن هذه الطريقة تحتاج إلى عمليات حسابية أكثر قياساً بما تحتاجه الطرق السابقة.

إن الخطوات التي بموجبها يتم حل المشكلة هي كما يلي[1]:

1- في مصفوفة التكاليف يتم حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل صف أو كل عمود.

2- اختيار الفرق الأكبر بين الصفوف أو الأعمدة على السواء.

3- اختيار المربع الذي يحتوي على أقل كلفة في الصف أو العمود الذي تم تحديده في الخطوة الثانية.

4- تخصيص أكبر كمية من البضاعة أو الإنتاج المطلوب نقله من مراكز التوزيع (وقد يكون ذلك هو كل ما يملكه التوزيع حيث بعدها ينفذ الموجود من البضاعة في المركز المذكور).

5- يحذف الصف أو العمود (مركز التوزيع أو مركز الاستلام) الذي يتم إشباع رغبته (بالنسبة لمركز الاستلام) أو الذي تنفذ البضاعة لديه (بالنسبة لمركز التوزيع).

6- إعادة الخطوات السابقة.

(1) D.Rogaliska, op., cit., pp. 205.

ولتوضيح فكرة هذه الطريقة والكيفية التي بموجبها يتم معالجة مشكلة نقل وتسويق البضائع والمنتجات بين مراكز التوزيع والاستلام نعتمد المشكلة التالية:

مشكلة رقم (1): توفرت في إحدى منظمات الأعمال الإنتاجية بيانات معينة تتعلق بتكاليف نقل من A_i موقع إنتاجي B_j مركز استلام (حيث أن: $i =1, 2, 3, j=1, 2$).

حيث كانت الطاقة الإنتاجية في المواقع الإنتاجية، كمية البضاعة المطلوب في مراكز الاستلام هي كما في الجدول التالي:

جدول رقم (4-13) بيانات المشكلة

مركز الاستلام / مواقع الإنتاج	B_1	B_2	العرض a_i
الموقع A_1	4	2	$a_1 = 60$
الموقع A_2	7	5	$a_2 = 40$
الموقع A_3	3	10	$A_3 = 70$
الطلب b_j	$b_{12} = 105$	$b_2 = 65$	170 / 170

المطلوب: حل المشكلة بطريقة فوجل لتنفيذ عملية النقل للبضاعة من مواقع الإنتاج إلى مراكز الاستلام بأقل كلفة كلية ممكنة.

الحل: تجري عملية الحل وفق الخطوات التالي:

1- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف أو عمود.

- أقل كلفتين في العمود الأول هما 3و4 والفرق بينهما هو←1.

- أقل كلفتين في العمود الثاني هما 5ا2 والفرق بينهما هو←3.
- أقل كلفتين في الصف الأول هما 5ا2 والفرق بينهما هو←2.
- أقل كلفتين في الصف الثاني هما 7ا5 والفرق بينهما هو←2 .
- أقل كلفتين في الصف الثالث هما 10ا3 والفرق بينهما هو←7.

2- إن الفرق الأكبر بين المصفوفة والأعمدة على السواء هو 7 وهو يقع في الصف الثالث، لذلك فإن الصف المذكور يتم عنده النقل.

3- أقل كلفة في الصف المذكور هو 3 والذي يقع في العمود الأول والصف الثالث.

4- تنقل 70 وحدة من البضاعة من الموقع الإنتاجي A_3 (وهو كل ما موجود في الموقع المذكور) إلى مركز الاستلام B_1 .

5- بعد نفاذ ما هو موجود من بضاعة في الموقع الإنتاجي A3، يتم حذف الصف المذكور من الجدول (4-13) وبعدها نحصل على ما يلي:

جدول رقم (4-14) النتائج الأولية لعملية نقل البضاعة

مركز الاستلام / مواقع الإنتاج	B_1	B_2	العرض a_i
A_1	4	2	60
A_2	7	5	40
الطلب b_j	35	65	100 / 100

يعاد تطبيق الخطوات السابقة، أي أن:

1- حساب الفرق بين أقل تكلفتين في كل صف أو عمود.

- أقل كلفتين في العمود الأول هما 4 2 والفرق بينهما هو←2.

- أقل كلفتين في العمود الثاني هما 7 5 والفرق بينهما هو←2.

- أقل كلفتين في العمود الأول هما 7 4 والفرق بينهما هو←3❋.

- أقل كلفتين في العمود الثاني هما 5 2 والفرق بينهما هو←3❋.

إن أكبر الفروق يقع في العمود الأول والعمود الثاني. ويجري اختيار أحد هذين العمودين (لأعلى التعيين)، حيث لو تم اختيار العمود الثاني، فإن أقل كلفة في هذا العمود هو 2.

إن ما موجود في الموقع الإنتاجي A_1 من بضاعة يبلغ 60 وحدة يتم نقلها إلى مركز الاستلام B_2 الذي يحتاج إلى 65 وحدة. وبذلك سوف تنفذ البضاعة في الموقع الإنتاجي A_1 ويبقى مركز الاستلام B_1 بحاجة إلى 5 وحدة.

إن المتبقي من البضاعة الموقع الإنتاجي A_2 سوف تنقل بالنتيجة إلى مركز الاستلام B_2 , B_1 وذلك كالآتي:

5 وحدات من البضاعة تنقل إلى مركز الاستلام B_2 والباقي الذي يبلغ 35 وحدة ينقل إلى مركز الاستلام B_1 ، وبعد إنجاز عمليات نقل وتوزيع البضاعة يتم الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (4-15) النتائج النهائية لعملية نقل البضاعة

مركز الاستلام / مواقع الإنتاج	B_2	B_1	العرض a_i
الموقع A_1	[4] 0	[2] 60	60
الموقع A_2	[7] 35	[5] 5	40
الموقع A_3	[3] 70	[10] 0	70
الطلب b_j	105	65	170 / 170

وعلى أساس الجدول رقم (4-15) يتم صياغة معادلة دالة الهدف وذلـك كـما يلي:

$$Z(X) = 3.\,70 + 5\,.\,5 + 7\,.\,35 + 2.\,60$$
$$= 210 + 25 + 245 + 120$$

التكاليف الكلية للنقل ديناراً 600 =

3- مرحلة الحل الأمثل:

إن الحصول على الحل الأمثل قد لا يكون سهلاً حيث أن ذلك يتطلب المرور بثلاث مراحل كما ذكرنا سابقاً. في المرحلـة الأولى يـتم تحديـد الحـل الابتـدائي (الأساسي) الممكن. وبعد ذلك تجري عملية تحسين نتائج هـذا الحـل في المرحلـة الثانية، للحصول على الحل الأفضل، ويتم بعد ذلك باستخدام عدد من الطـرق أهمها وأكثرها شيوعاً وهي الطرق التالية ابحث عن الحل الأمثل.

1- طريقة فورد – فلكورسن Ford – Foulkerson

وهي من الطرق التي تستخدم في تحسين الحل الابتدائي (الأساسي) الممكـن، حيث بعد أن يتم الحصول على المذكور باستخدام الطرق الواردة ذكرهـا سـابقاً، يستلزم الأمر تحسين الحل الابتدائي للحصول عـلى الحـل الأمثـل [1]. إن فكـرة تطبيق هذه الطريقة تتضح مـن خـلال المخطـط الانسـيابي الموضـح في الشـكل (4-5). ويتطلب الأمر أيضاً تقديم مثـال عـلى أساسـه يـتم اسـتخدام الطريقـة المذكورة. ولو اعتمدنا نفـس بيانـات السـابق المثـال. وبالـذات تلـك البيانـات الموجودة في الجدول (4-11) حيث في احد مراحل عملية الحل يتم التوصـل إلى الجدول التالي:

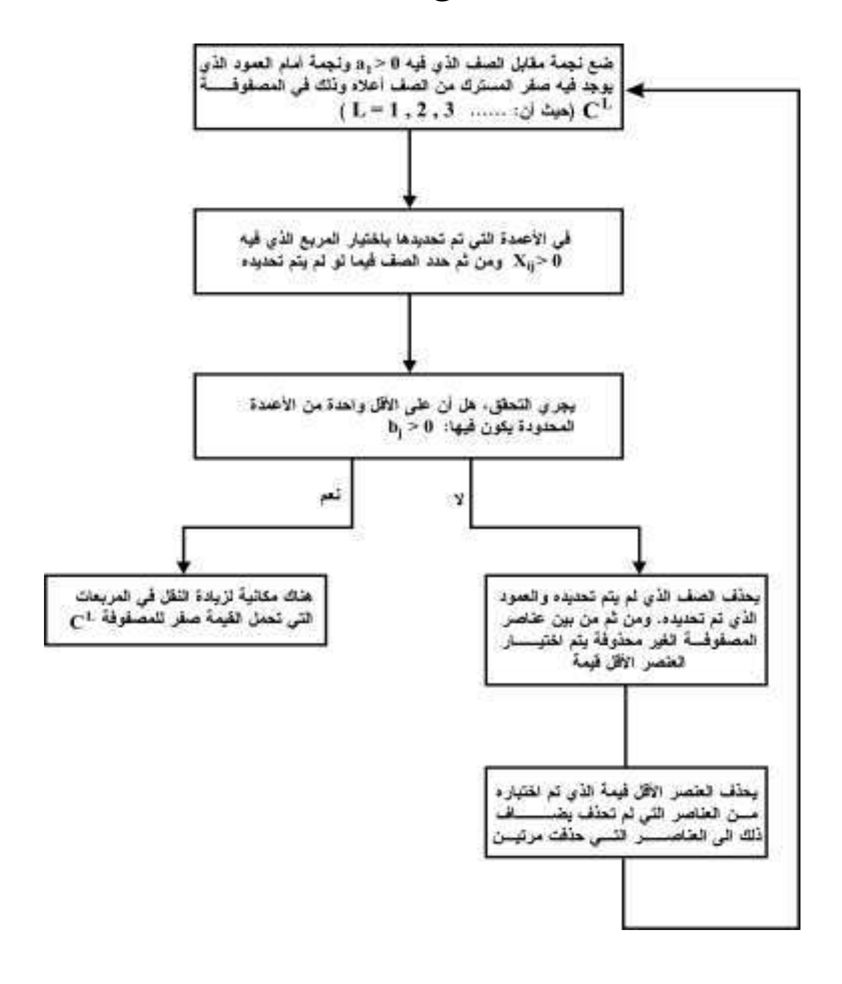
جدول رقم (4-16) النتائج الأولية لعملية نقل البضاعة

المخازن الرئيسية \ مراكز البيع	B_1	B_2	B_3	العرض a_i	قيم a_i المعدلة
A_1	1	1	0 130	$a_1 = 200$	70
A_2	0 140	0 20	0	$a_2 = 160$	0
الطلب b_j	$b_1 = 140$	$b_2 = 90$	$b_3 = 130$	360 \ 360	
قيم a_i المعدلة	0	70	0		

(1) D. Rogaliska, op., cit., pp. 204.

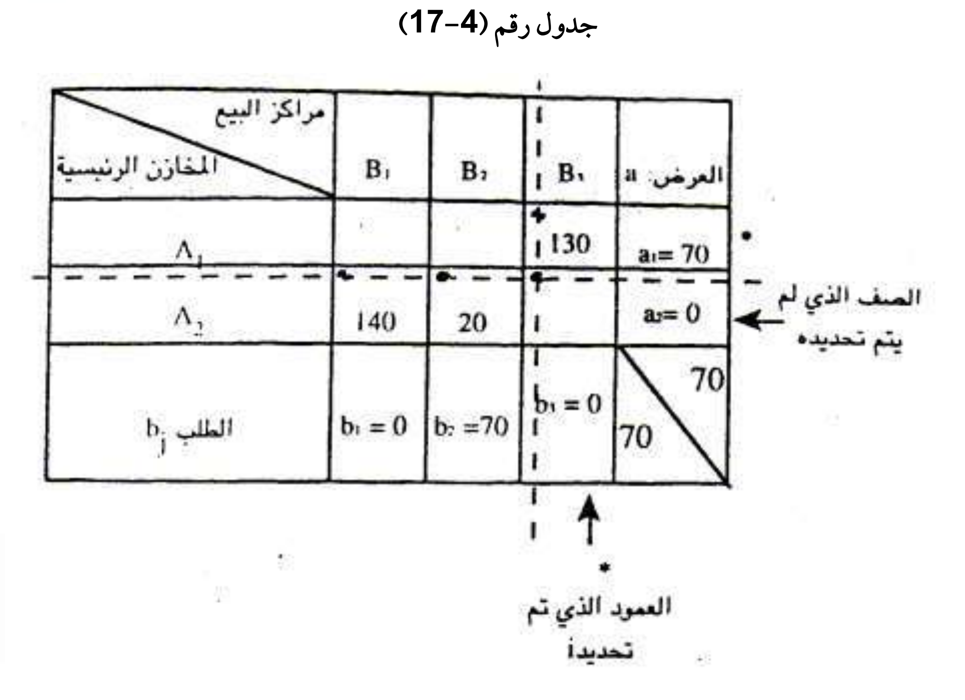
ويختلف هذا الجدول عن الجدول (4–12) الواردة ذكره في المثال السابق هـو إن المربع الذي يقع فيه المتغير X_{12} والذي يحوي الكلفة واحد ولـيس صـفراً لـن تنفذ فيه عملية نقل. ولهذا السبب لا تزال هناك كمية غير موزعة تبلغ 70 وحدة. وهنا يتم تطبيق المخطط الانسيابي الموضح بالشـكل (4–5) لكـي نحصـل عـلى الجدول التالي:

الشكل (4–5) المخطط الانسيابي الذي يوضح مراحل تحسين الحل للوصول إلى الحل الأمثل (1)



(1) H. KRYNSKi , A. BADACH ,.op. cit., pp. 169.

جدول رقم (4-17)



مراكز البيع / المخازن الرئيسية	B_1	B_2	B_1	العرض a_i
A_1			130	$a_1 = 70$
A_2	140	20		$a_2 = 0$
الطلب b_j	$b_1 = 0$	$b_2 = 70$	$b_1 = 0$	70 / 70

طبقاً للمخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-5) فإن B_2 هو العمود الـذي لم يتم تحديده بعد والذي لا يزال يحتاج إلى بضاعة. كذلك أن B1 هو العمود الذي يتم تحديده ولكن الطلب فيه يساوي صفر، وهـو يعنـي أن لـيس هنـاك حاجـة للبضاعة.

يجري تحديد المصفوفة الجديدة والتي يتم بنائها على أساس المصـفوفة C^1 مـع الاعتماد على المخطط الانسيابي (4-5) ويرمز لها C^2. ويمكن أن تقام على أساس هذه مصفوفة أخرى يرمز لها C^3 وهكذا تستمر العملية.

إن صيغة المصفوفة C^2 هي كما يلي:

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن عناصر المصفوفة C^2 يجري إحلالها محل عناصر المصفوفة C^1 في الجدول (4–17) لنحصل بعد ذلك على الجدول التالي:

جدول رقم (4–18)

مركز البيع / المواقع الإنتاجية	B_1	B_2	B_3	العرض a_i	
A_1	0	^{0}(70+) +	^{0} 130	$-70^{(-70)}$	❋
A_2	0	0	1	0	❋
الطلب b_j	0	$-70^{(-70)}$	0	70 / 70	
	❋	❋	❋		

في الجدول (4–18) تم توزيع ما هو موجود في الموقع الإنتاجي A_2 وذلك بين المربعات التي فيها $X_{ij} = 0$ وذلك كما يلي:

$$X_{12} = Min\ [70,70]\ = 70$$

وبما أن عمليات النقل قد تمت طبقاً للمصفوفة C^2 وبالذات عند العناصر الصفرية من المصفوفة، فإن الحل الذي تم الحصول عليه في الجدول (4–18) هو الحل الأمثل. ومنه نستنتج الخطة المثلى للنقل كما في المصفوفة التالية:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 70 & 130 \\ 140 & 20 & 0 \end{bmatrix}$$

وعلى أساس هذه المصفوفة يتم حساب دالة الهدف، وذلك كما يلي[1]:

$$Z (X) = 6. 0 + 70 . 4 + 2. 130 + 5. 140 + 3.20 + 2.0$$

التكاليف الكلية للنقل دينار 1300 =

مشكلة رقم (2): منظمة أعمال إنتاجية معينة تملك خمسة مواقع إنتاجية A_1, A_2, A_3 , A_4, A_5 أ تنتج بضائع معينة وتقوم بتجهيزها إلى خمسة مراكز بيع في مواقع جغرافية مختلفة وهي B_1, B_2, B_3 , B_4, B_5. إن طاقة إنتاج كل موقع من المواقع الإنتاجية هي $A_1 = 14,A_2 = 6,A_3 = 22,A_4 = 12,A_5 = 3$

أما الحاجة للبضائع فإنها تحسب شهرياً وذلك لكل مركز بيع وكما يلي:

$$B_1 = 15, B_2 = 21, B_3 = 7 , B_4 = 13 , B_5 = 3$$

تكاليف نقل الوحدة الواحدة من البضائع المنتجة في المواقع Aj إلى مراكز البيع Bj (حيث أن: i , j = 1 , 2 , 3 , 3 , 5) تتضح من خلال المصفوفة التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 20 & 16 & 18 & 20 & 17 \\ 12 & 15 & 13 & 15 & 10 \\ 8 & 10 & 18 & 11 & 13 \\ 5 & 12 & 18 & 18 & 17 \\ 13 & 14 & 16 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

---

(1) إن هذه النتيجة (Z (X) = 1300) هي نفسها التي حصلنا عليها بموجب الطريقة السابقة، وهذا يعني أن الحل الأمثل لهذه المشكلة يتم الحصول عليه بمرحلتين (الممكن – الأمثل)، وليس ثلاث مراحل (الممكن، الأفضل، الأمثل).

المطلوب: طلبت المنظمة من إدارة التسويق والنقل دراسة المشكلة لوضع خطة نقل يكون عندها مجموع التكاليف الكلية للنقل أقل ما يمكن.

الحل: في البداية يتم افتراض X_{ij} (حيث أن: i , j = 1 , 2 , 3 , 4 , 5) رمز لكمية البضاعة المنقولة من الموقع الإنتاجي Ai إلى مركز البيع Bj.

من منطوق المشكلة يتضح أن: $\sum_{i=1}^{5} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$ وهذا يعني أن هذه المشكلة يكون فيها النقل مغلقاً.

ويمكن عرض بيانات المشكلة الحالية من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-19) بيانات المشكلة

مركز الاستلام / مواقع الإنتاج	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	العرض a_i
A_1	20	16	18	20	17	14
A_2	12	15	13	15	10	6
A_3	8	10	18	11	13	22
A_4	5	12	18	18	17	12
A_5	13	14	16	12	16	5
الطلب b_j	15	21	7	13	3	59 / 59

بالاستناد إلى النظرية العامة المذكورة في بداية هذه الفصل، وبالاعتماد على المخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-3). يتم إيجاد قيم صفرية في كل صف وفي كل عمود وذلك كما يلي:

$$C^o = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 9 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 10 & 13 & 12 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow C^1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & 8 & 13 & 12 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

إن مجموع التكاليف الكلية للنقل تكون أقل ما يمكن إذا تم النقل طبقاً للعناصر الصفرية الموجودة في المصفوفة C^1 (حيث أن: $X_{ij} > 0$). وبالرجوع إلى المخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-4) والمرتبط بطريقة العنصر الأقل كلفة، يتم توزيع البضاعة من المواقع الإنتاجية إلى مراكز البيع طبقاً للعناصر الصفرية الموجودة في المصفوفة C^1 وذلك كما في الجدول التالي:

جدول رقم (4-20)

مركز البيع / المواقع الإنتاجية	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	العرض a_i
A_1	4	0	0	4	1	0
A_2	2	1	1	5	0	3
A_3	0	7	7	3	5	7
A_4	0	8	8	13	12	12
A_5	1	2	2	0	4	0
الطلب b_j	0	7	7	8	0	22 / 22

من الجدول (4-20) يتضح أن هناك مربع فيه صفر لم تتم فيه عملية نقل، لذلك فإن الحل الذي تم الحصول عليه. هو ليس بالحل الأمثل. ولكي يتم الحصول على الحل الأمثل، يتم اللجوء إلى المخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-5). حيث في البداية يتم وضع نجمة أمام أي صف يكون فيه $a_1 > 0$ ، وكذلك أمام أي عمود يشترك مع الصف المذكور بقيمة صفرية واحدة. في الأعمدة التي تم تحديدها، يتم اختيار المربعات التي يكون فيها $X_{ij} > 0$ ويحدد الصف الذي لم يتم تحديده.

وبعد ذلك ينبغي التأكد من أن على الأقل عمود واحد قد تم تحديده وكان فيه $b_j > 0$ ، فإذا كانت الإجابة بـ لا (وهو ما موجود حالياً بالجدول (4-20) فإن الخطوة اللاحقة هي تنظيم الجدول التالي:

جدول رقم (4-21)

مراكز البيع \ المواقع الانتاجية	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	العرض a_i	
A_1	4	0	0	4	1	0	
A_2	2	5	(1)	5	0 3	3	*
A_3	0 15	2	7	3	5	7	*
A_4	0	7	8	13	12	12	*
A_5	1	2	2	0 5	4	0	
الطلب b_j	0	7	7	8	0	22 \ 22	
	*				*		

في الجدول رقم (4-21) يتم تنفيذ الخطوات التالية:

1- يتم شطب الصفوف التي لم يتم اختيارها والأعمدة التي تم اختيارها.

2- من بين العناصر غير المستغلة للمصفوفة C^1 يجري اختيار أقل العناصر قيمة (وهو العنصر (1) كما هو واضح في الجدول (4-21).

الخطوة التالية هي القيام بعملية طرح العنصر الأقل قيمة من العناصر الأخرى التي لم يتم طرحها. بعدها يتم إضافة العنصر الأقل قيمة المذكور إلى العناصر التي تم شطبها مرتين، ونتيجة لذلك يتم الحصول على المصفوفة C^2.

بعد ذلك تبدأ مرحلة تحسين الحل السابق. ويكون ذلـك برسـم سـهم يرمـز لـه (α_n) يربط بين المربعات في الجدول الذي يحوي قيم موجبة لـ a_i مع المربعـات التي تحوي قيم موجبة لـ b_i ، وذلك وفق الخطوات التالية:

1- إن بداية السهم هي المربع الموجود في الصف الذي تم تحديده والذي فيـه قيمة موجبة للمتغير a_i.

2- إن انحراف السهم (α_n) يكون في داخل المربع الذي يحوي قيمة صفرية للمصفوفة C_2 وذلك ضمن إطار الصف المحدد والعمود المحدد أيضاً.

3- إن نهاية السهم (α_n) تصل إلى المربع الموجود في العمـود المحـدد الـذي يحوي قيمة موجبة للمتغير bj. وطبقاً لهذه الخطوات ينبغي تنظيم الجدول التالي:

جدول رقم (4-22)

مراكز البيع \ المواقع الانتاجية	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	العرض a_i	
A_1	5	0	0	4	2	0	
A_2	2	4	0 (+3) +	α ← 4	0	(-3) - 3	*
A_3	0	1	6	2	3	7	*
A_4	0	6	7	12	12	12	*
A_5	2	2	↓ 2	0	5	0	
الطلب b_j	0	7	(-3) - 7	8	0	22 \ 22	
	*		*		*		

إن المربع الذي ينطلق منه السهم (α_n) يقع ضمن العمود a_i وإن علامته (–) أما المربع اللاحق والذي ينحرف عنده السهم (α_n) فإنه علامته سوف تكون (+). المربع الأخير الذي ينتهي عنده السهم (وهو موجود في الصف bj) يأخذ العلامة (–) وهكذا تستمر عملية التناوب في تحديد الإشارة. وبشكل عام فإن المفروض أن يكون في أي عمود وفي أي صف مربعين يمر من خلالهما السهم (α_n) ، إشارة إحداهما (–) والآخر إشارته (+).

إن هذه الإجراءات قد طبقت على الجدول (4–22)، وقد تم الحصول على النتائج التالي:

$$d_{\alpha 1} = Min\ [7.3] = 3$$

حيث إن الرمز $d_{\alpha 1}$ يعني مقدار لأقل عملية نقل للمسار المشار إليه بالسهم α_1 وذلك من $A_2 \longrightarrow B_3$ وهو يعني أيضاً أقل كمية ممكنة من البضائع يمكن نقلها على المسار المعبر عنه بالرمز α_1 ، ويتم طرح القيمة $d_{\alpha 1}$ من العنصر a_1 أو العنصر b_j حيث أن $d_{\alpha 1}$ مساوية من حيث القيمة للمتغير X_{ij} (وبالذات المتغير X_{23})، ويتضح ذلك كالآتي:

$$d_{\alpha 1} = X_{ij} = Min\left\{a_i\ ,\ b_j\right\}$$
$$d_{\alpha 1} = X_{23} = Min\left\{3\ ,\ 7\right\}$$

وهذا يعني طرح القيمة $X_{23} = 3$ من b_2 , b_3 وتكون نتيجة هذه العمليات الحسابية هو تحوير القيمة الموجودة في العمود B_3 ، علماً بأن القيمة الموجودة في العمود المذكور محققة للشرط $b_j > 0$.

ولما كان هناك قيم في الحقل a_i لا تزال موجبة (أي أن: $a_i > 0$) وإن هناك قيم في الحقل b_j لا تزال موجبة (أي أن: $b_j > 0$)، لذلك فإن الحل الذي يتم الحصول عليه من الجدول (4-22) لا يزال غير أمثلا. لذلك يتطلب الأمر الاستمرار في تحسين الحل الحالي بالاستناد إلى المخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-5) وعندها سوف نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (4-23)

مراكز البيع \ المواقع الانتاجية	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	العرض a_i	
A_1	5	0	0	4	2	0	
A_2	2	4	0	0	0	0	
A_3	0	[1]	6	2	5	7	*
A_4	0	6	7	12	12	12	*
A_5	2	2	2	0	5	0	
الطلب b_j	0	7	4	8	0	19 \ 19	
	*						

الخطوة التالية هي: العمل بموجب المخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-5) ولذلك لأجل الحصول على المصفوفة C^3 ووضعها في إطار الجدول التالي:

جدول رقم (4-24)

مواقع البيع \ المواقع الإنتاجية	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	العرض a_i
A_1	6	0 14 (-)	0 (+)	4	2	0
A_2	3	4 14	0	4	0	0
A_3	0 (-4) (-) 15	0 (+7) (+) (+4) (+)	5 (+)	1	4	(-7) (-)
A_4	0 (+4)	5 (+4) 5	6 (+)	11	1	(-) 12 (-4)
A_5	3	2	2	0	5	0
الطلب b_j	0	(-7) (-) 7	(-4) (-) 4	8	0	19 \ 19

ملاحظة: نهايات الأسهم عند كميات النقل الحقيقية

من الجدول أعلاه نستنتج ما يلي:

$$d_{\alpha 2} = Min\ \{7.7\} = 7$$

$$d_{\alpha 2} = Min\ \{12\ ,\ 15, 14, 4\} = 4$$

إن تفسير العمليات المتعلقة بتحسين الحل التي جرت على أساس الجدول (4-24) هي كما يلي:

إن العمود المحدد الذي يحوي كمية من الطلب مقدارها 7 يوجد فيه مربع واحد يحوي القيمة الصفرية (في إطار المصفوفة C^3) وهو واقع أيضاً ضمن أحد الصفوف. ويتم تجهيز المربع المذكور بالكمية المناسبة من البضاعة ضمن مسار النقل α_2 وذلك كما يلي:

$$d_{\alpha 2} = X_{32} = Min\ \{7,7\} = 7$$

وقد تم تحوير حجم الكمية المطلوبة المحددة من خلال العمود B_2 . وكـذلك الشيء بالنسبة لكمية البضاعة الموجودة في الصف A_3 كـما هـو واضـح في مسـار السهم α_2 .

- بالنسبة للعمود المحدد الآخر (من خـلال العلامـة *) الـذي يحـوي كميـة طلب مقدارها 4 وهو العمود B_3، الذي يحوي طلب مقداره 4. ويـتم ذلـك مـن العنصر المجاور الذي يوجد فيه المتغير X_{12} ويحـوي كميـة بضـاعة مقـدارها 14 (أي أن: $X_{12} = 14$). وعليه يتم طرح الكميـة $X_{13} = 4$ مـن الكميـة $X_{12} = 14$ وتستمر عملية الإضافة والطرح على أساس المسار α_3 وذلك لغاية نهايته عنـد العمود B_3 وهكذا يتضح أن هناك عملية موازنة مستمرة بحيث أن في أي عمود وأي صف هناك عملية طرح وإضافة متكافئة يكون مجموعها صفراً.

إن حصيلة تنفيذ المسار α_2 والمسار α_3 يؤدي إلى الحصـول عـلى الجـدول (4-25) الذي لا تزال فيه كمية طلب على البضـاعة لم يـتم إشـباعها ومقـدارها هــذه الكمية 8. لذلك يتطلب الأمر إعادة تنظيم مصفوفة التكاليف C^3.

جدول رقم (4-25)

المواقع الانتاجية \ مراكز البيع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	العرض a_i	
A_1	6	9 10	10 4	4	2	0	*
A_2	3	4	0 3	4	0 3	0	*
A_3	0 11	0 11	[1]	5	4	0	
A_4	0 4	5	6	11	11	8	*
A_5	3	2	2	0 5	5	0	
الطلب b_j	0	0	0	8	0	8 \ 8	
	*	*	*		*		

يتضح أن:

$$d_{\alpha 2} = Min\ \{8,11,8\} = 8$$

إن القيام بالخطوات والإجراءات نفسها، يؤدي الأمر إلى الحصول على الجدول (4-26):

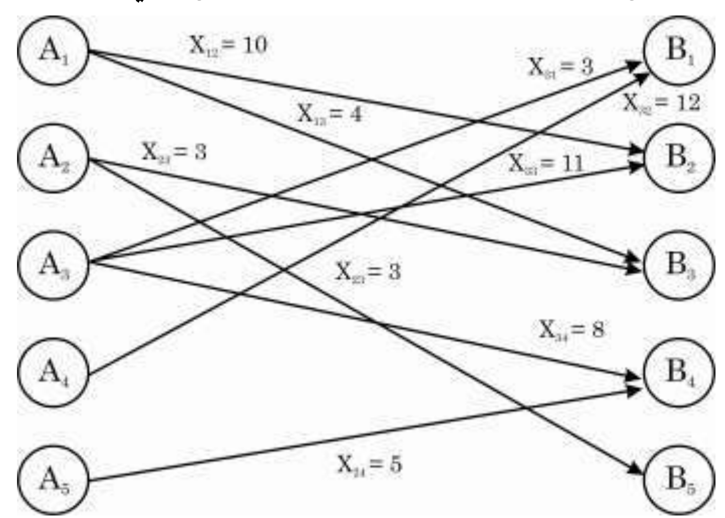
جدول رقم (4-26)

مراكز البيع \ المواقع الانتاجية	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	العرض a_i
A_1	6	0 10	0 4	3	2	0
A_2	3	4	0 3	3	0 3	0
A_3	0 3	0 11	5	0 8	4	0
A_4	0 12	5	6	10	11	0
A_5	4	3	3	0 5	6	0
الطلب b_j	0	0	0	0	0	0 \ 0

ولما كان العمود a_i يحوي قيم كلها أصفار. وكذلك الشيء نفسه بالنسبة للصف الذي فيه القيم b_j، فإن الحل الذي تم الحصول عليه هو الحل الأمثل. وإن الخطة المثلى للنقل تتضح من خلال المصفوفة التالية:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 11 & 0 & 8 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

إن خطة النقل المثلى يمكن عرضها من خلال الشكل التالي:



الشكل رقم (4–6) مسارات النقل التي توضح خطة النقل المثلى للبضاعة أن التكاليف الكلية لخطة النقل الموضحة بالشكل (4–6) يـتم حسـابها اسـتناداً إلى ومصفوفة التكاليف C التي سبق ذكرها في منطوق المشكلة. ويتم ذلك في إطـار معادلة دالة الهدف كما يلي:

$$Z(X) = 10.16 + 4.18 + 3.13 + 3.10 + 3.8 + 11.10 + 8.11 + 12.3 + 5.12 = 619$$ ديناراً

إن الطريقة الأخرى لتحسين الحل الابتدائي (الأساسي) الممكن هـي طريقـة التوزيع المعدل مع المسار المتعرج والذي سوف نوضحها أدناه بشيء من الإيجاز.

2– طريقة التوزيع المعدل (مع المسار المتعرج)

The Modified Distribution Method (With Stepping Stone)

تعتبر هذه الطريقة أيضاً من الطرق المهمة في تحسين الحل الابتدائي الذي يـتم عليه في المراحل السابقة وذلك لبلوغ الحل الأمثل. تعتمد فكرة هذه الطريقة على النظرية العامة التالية[1]:

---

(1) H. KRYNSKi , A. BADACH ,.op. cit., pp. 161.

نظرية عامة: الحل الأمثل لمشكلة نقل معينة لا يتغير إذا تم طرح من كل صف في إحدى صيغ مصفوفة الكلفة C_{ij} المقدار الثابت V_i ومن كل عمود من أعمدة المصفوفة المذكورة مقدار ثابت أيضاً وليكن ذلك u_j، بحيث أن.

1- بالنسبة للمتغيرات الأساسية

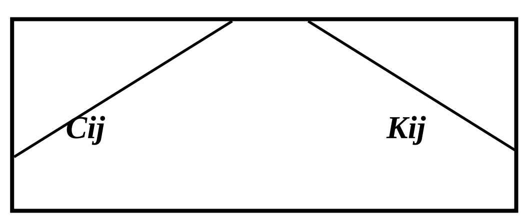
$$C_{ij} = V_i + u_j$$
$$C_{ij} - (V_i + u_j) = 0$$
$$K_{ij} = C_{ij} - (V_i + u_j) = 0$$

2- بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية:

$$K_{ij} = C_{ij} - (V_i + u_j)$$

حيث أن K_{ij} الحالة الجديدة للمصفوفة C_{ij} . أن موقع هذه الكلف مع المتغيرات الأخرى في مربع النقل يتضح من خلال الشكل التالي:

الشكل رقم (4-7) مواقع الكلف في مربع النقل u_j



u_j

المشكلة التالية توضح فكرة تحسين الحل الابتدائي (الأساسي) الممكن باستخدام طريقة التوزيع المعدل مع المسار المتعرج.

مشكلة رقم (1): منظمة أعمال معينة تملك موقعين للإنتاج A_2 , A_1 ، ترغب في تسويق إنتاجها إلى ثلاث مراكز استلام وهي B_1 , B_2 , B_3 كلفة نقل الوحدة الواحدة من البضاعة المنتجة من الموقع A_i إلى مركز الاستلام Bj هـي كـما في مصفوفة التكاليف C_{ij} التالية:

جدول رقم (4-27)

المواقع الانتاجية / مراكز البيع	B_1	B_2	B_3	العرض a_i
A_1	3	2	2	10
A_2	4	2	2	7
الطلب b_j	4	5	8	17 \ 17

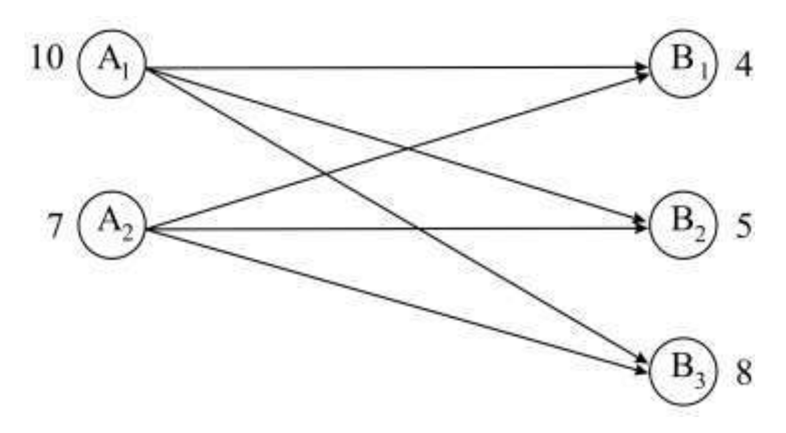
المطلوب: طلبت إدارة المنظمة من إدارة التسويق والنقل دراسة المشـكلة لوضـع خطة نقل للبضاعة من المواقع الإنتاجية إلى مراكز الاستلام وذلك بأقل كلفة نقل كلية ممكنة.

الحل: وضعت إدارة التسويق والنقل الافتراضات التالي:

الصيغة العامة لمصفوفة النقل هي $X_{ij} \longleftarrow \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{32} & X_{23} \end{bmatrix}$

مسارات النقل العامة لهذه المصفوفة فهي:

الشكل رقم (4-8) مسارات النقل العامة قبل التوزيع



الصيغة العامة لدالة الهدف هي:

$$Z = 3X_{11} + 2X_{12} + 2X_{13} + 2X_{21} + 2X_{22} + 3X_{23} \longrightarrow Min$$

1- شروط الموقع الإنتاجي

الشروط الأساسية في المشكلة

$$\left.\begin{array}{ll} A_1: X_{11} + X_{12} + X_{13} & = 10 \\ A_2: \quad X_{21} + X_{22} + X_{23} & = 7 \end{array}\right\}$$

2- شروط مراكز الاستلام

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{B_1: X_{11} + X_{21}} & \boldsymbol{= 4} \\ \boldsymbol{B_2: X_{12} + X_{22}} & \boldsymbol{= 5} \\ \boldsymbol{B_3: X_{13} + X_{23}} & \boldsymbol{= 8} \end{array}\right\}$$

3- الشروط المنطقية

$X_{ij} \geq 0$

ويمكن تمثيل الشروط أعلاه من خلال المصفوفة التالية:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

هناك مجموعتان من الطرق الرئيسية التي تستخدم لإيجاد الحل الابتدائي الأولى الممكن والحل الأفضل للمشكلة السابقة وهذه الطرق هي:

أولاً:

1) طريقة الركن الشمالي الغربي.

2) الطريقة العشوائية.

ثانياً:

1) طريقة العنصر الأقل كلفة.

2) طريقة فوجل.

إن الانتهاء من تطبيق الطرق الواردة في أعلاه يؤدي إلى الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (4-28)

المواقع الانتاجية \ مراكز الاستلام	B_1	B_2	B_3	العرض a_i
A_1	3 4	2 5	1 1	10
A_2	4	2	3 7	7
الطلب b_j	4	5	8	17 \ 17

بموجب التوزيع الوارد في الجدول المذكور أعلاه تكون دالة الهدف كما يلي:

التكاليف الكلية للنقل دينار $Z = 4.3 + 5.2 + 1.1 + 7.3 = 44$

من الجدول (4–28) يمكن أن نستنتج ما يلي:

X_{11} , X_{12} , X_{13} , X_{23} هي متغيرات أساسية (تمثل المربعات التي حدث فيها نقل).

X_{21} , X_{22} هي متغيرات غير أساسية (تمثل المربعات التي لم يحدث فيها نقل) الخطوة التالية هي تحسين نتائج الحل السابق باستخدام أحد الطرق التالية:

- طرقة فورد – فلولكيرسون.

- طريقة التوزيع المعدل مع المسار المتعرج.

ولنأخذ الطريقة الثانية، وهي طريقة التوزيع المعدل مع المسار المتعرج، حيث بموجب هذه الطريقة يتم الاعتماد على العلاقة الرياضية التالية:

$$K_{ij} = C_{ij} - (V_1 + u_j)$$

يتم حساب قيم V_j , u_j بالاعتماد على الجدول (4–28) إذ يتم ذلك كما يلي :

1– قيم X_{ij} الأساسية (وهي: X_{11} , X_{12} , X_{13} , X_{23}).

في البداية تكون قيمة $K_{ij} = 0$ وذلك بسبب عدم وجود تغير في مصفوفة الكلفة C_{ij} ويجري حساب القيم V_i , u_j كما يلي:

- بالنسبة للمتغير الأساس X_{11}

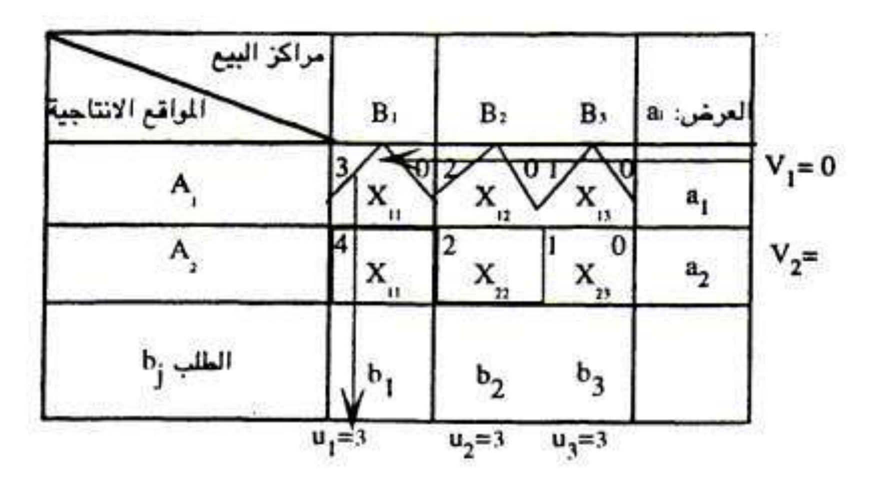
$$K_{ij} = C_{ij} - (V_1 + u_j)$$
$$K_{11} = C_{11} - (V_1 + u_1)$$
$$0 = 3 - (V_1 + u_1)$$

ولو فرضنا أن قيمة $V_1 = 0$

فإن : $u_1 = 3$

وتتضح هذه العملية على أساس الجدول التالي:

جدول رقم (4-29)



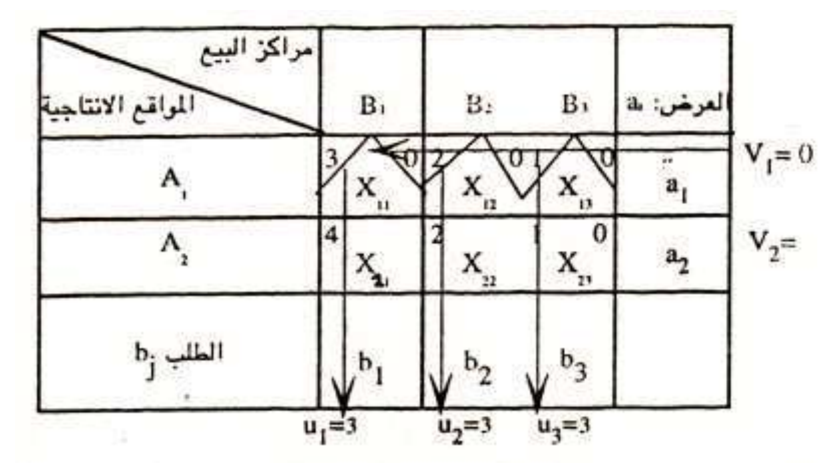
- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{12}: $K_{12} = C_{12} - (V_1 + u_2)$

على أساس الجدول رقم (4-29) الذي تم فيه افتراض القيمة $V_1 = 0$ يتم حساب العلاقة الرياضية أعلاه كما يلي:

$$0 = 2 - (0 + u_2)$$
$$u_2 = 2$$

يتم تكرار هذه الحسابات بالنسبة للمتغير الأساسي X_{13}، وعندها نحصل على قيمة $u_3 = 1$ وبعدها يتم تنظيم الجدول التالي:

جدول رقم (4-30)



مراكز البيع / المواقع الانتاجية	B_1	B_2	B_3	العرض: a_i	
A_1	3 X_{11} 0	2 X_{12} 0	1 X_{13} 0	a_1	$V_1 = 0$
A_2	4 X_{21}	2 X_{22}	1 X_{23} 0	a_2	$V_2 =$
الطلب b_j	b_1	b_2	b_3		
	$u_1 = 3$	$u_2 = 3$	$u_3 = 3$		

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{13}: $K_{23} = C_{23} - (V_2 + u_3)$

من الجدول رقم (4-30) يتضح أن $u_3 = 1$ وبالتعويض نحصل على ما يلي:

$0 = 3 - (V_2 + 1)$

$\therefore V_2 = 2$

2- قيم X_{ij} غير الأساسية (X_{12} , X_{22})

إن القيمة K_{ij} مجهولة يستلزم الأمر معرفتها من أجل بيان مدى إمكانية تحسين الحل في ظل كلف جديدة.

- بالنسبة للمتغير غير الأساسي X_{21}:

$$K_{21} = C_{21} - (V_2 + u_1)$$
$$K_{21} = 4 - (2 + 3)$$
$$K_{21} = -1$$

- بالنسبة للمتغير غير الأساسي X_{22}:

$$K_{22} = C_{22} - (V_2 + u_2)$$
$$K_{22} = 2 - (2 + 2)$$
$$K_{22} = 2 - 4$$
$$K_{22} = -2$$

في ظل النتائج أعلاه يتم تنظيم الجدول التالي:

جدول رقم (4-31)

مراكز البيع / المواقع الانتاجية	B_1	B_2	B_3	العرض: a_i	
A_1	3 0 X_{11}	2 0 X_{12}	1 0 X_{13}	a_1	$V_1 = 0$
A_2	4 X_{21}	2 2 X_{22}	1 0 X_{23}	a_2	$V_2 = 2$
الطلب b_j	b_1	b_2	b_3		
	$u_1=3$	$u_2=3$	$u_3=3$		

يتم اختيار المربع الذي يقع فيها المتغير غير الأساسي والذي فيه قيمة K_{ij} أقل ما يمكن. ومن الجدول (4-31) يتضح أن المربع الذي يقع فيه المتغير X_{22} تكون قيمة K_{ij} أقل ما يمكن وهي (2-) لذلك ينبغي إجراء عملية نقل في هذا المربع. علماً بأن نقل وحدة واحدة عبر المربع المذكور يعني تقليل التكاليف الكلية بمقدار (2) وحدة نقدية. وتتم عملية النقل المذكورة بعد أن يتم افتراض المقدار λ الذي يعني مقدار المتغير الواجب تنفيذه في الكميات الموجودة في

صيغة الحل الواردة في الجدول (4-31) ولغـرض بيـان عمليـة التغيـير يتطلـب الأمر الجدول التالي[1]:

جدول رقم (4-32)

مراكز البيع / المواقع الانتاجية	B_1	B_2	B_3	العرض: a_i
A_1	3 4	2 5-λ	1 1-λ	-70
A_2	4	2	3 7-λ	0
الطلب b_j	$b_1=4$	$b_2=5$	$b_3=8$	70 / 70

من الجدول أعلاه يتضح أن:

$$\lambda = X_{22} = Min(5,7) = 5$$

أي أن:

$$\lambda = 5$$

إن النتيجة النهائية بعد التعديلات السابقة هو الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (4-33)

مراكز الاستلام / المواقع الانتاجية	B_1	B_2	B_3	العرض a_i
A_1	3 4	2	1 6	$a_1=10$
A_2	4	2 5	3 2	$a_2=7$
الطلب b_j	$b_1=4$	$b_2=5$	$b_3=8$	17 / 17

[1] التغيير يمكن أن يكون بزيادة أو طرح المقدار λ من الكميات الموجودة في مربعات جدول النقل.

وتحسب دالة الهدف كما يلي:

$$Z = 4.3 + 6.1 + 5.2 + 2.3 = 34$$

إن قيمة دالة الهدف السابقة كانت 44، أي أن الفرق هو 10 وحدات نقدية وهذا الفرق ناتج عن حاصل ضرب الرقم 2− (الذي يمثل قيمة K_{22} في المربع الذي يحوي المتغير X_{22}) بالرقم 5 (الذي يمثل كمية البضاعة المنقولة في المربع X_{22}).

تجري عملية أخرى بموجبها يتم التأكد من أن الحل الذي تم الحصول عليه هو الحل الأمثل أم لا. فإذا كانت الكلفة K_{ij} للمتغيرات غير الأساسية ذات إشارة موجبة، فإن ذلك يعني أن الحل الذي تم الحصول عليه هو الحل الأمثل. أما إذا كانت الإشارة سالبة لهذه الكلفة فإن ذلك يعني أن الحل الذي تم الحصول عليه ليس بالحل الأمثل، ويتطلب الأمر المضي في إجراءات تحسينه. ويتم ذلك من خلال حساب قيمة k_{ij} للمتغيرات الأساسية وغير الأساسية في جدول النقل.

إن إعادة حساب قيمة K_{ij} تبدأ في الجدول التالي:

جدول رقم (4−34)

المواقع الانتاجية / مراكز الاستلام	B_1	B_2	B_3	العرض a_i
A_1	3 X_{11}	2 X_{12}	1 X_{13}	a_1
A_2	4 X_{21}	2 X_{22}	3 X_{23}	a_2
الطلب b_j	b_1	b_2	b_3	17 / 17

في الجدول (4–34) يتضح أن:

$X_{23}, X_{22}, X_{13}, X_{11}$ ⟵ متغيرات أساسية

$X_{21}, X_{12},$ ⟵ متغيرات أساسية

1) لكل قيم X_{ij} الأساسية (X_{23} , X_{22} , X_{13} , X_{11}) يتم إجراء الحسابات اللازمة (على افتراض أن $V_1 = 0$) وذلك لإيجاد قيم V_i , u_j الجديدة كما يلي:

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{11}:

$$K_{11}=C_{11}-(V_1+u_1)$$
$$0=3-(0+u_1)$$
$$u_1=3 \therefore$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{13}:

$$K_{13}=C_{13}-(V_1+u_3)$$
$$0=1-(0+u_3)$$
$$u_3=1 \therefore$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{23}:

$$K_{23}=C_{23}-(V_2+u_3)$$
$$u_3=1 \therefore$$
$$0=3-(u_2+1)$$
$$V_2=2 \therefore$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{22}:

$$K_{22}=C_{22}-(V_2+u_2)$$
$$V_2=2 \therefore$$
$$0=2-(2+u_2)$$
$$u_2=0 \therefore$$

2) لكل قيم X_{ij} غير الأساسية (X_{21} , X_{12})، يتم إجراء الحسابات اللازمة لإيجاد قيم K_{ij} الجديدة، وذلك كما يلي:

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{12}:

$$K_{12}=C_{12}-(V_1+u_2)$$
$$K_{12}=2-(0+0)$$
$$K_{12}=2$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{21}:

$$K_{21}=C_{21}-(V_1+u_1)$$
$$K_{21}=4-(2+3)$$
$$K_{21}=-1$$

ولما كان هناك قيمة سابقة للمتغير K_{ij} (حيث أن: $K_{21} = -1$) فإن ذلك يعني أن هناك إمكانية لتحسين الحل الحالي. وتبدأ عمليات تحسين الحل من المربع X_{21} الذي ظهرت فيه الكلفة السابقة(أي أن: $K_{21} = -1$) وذلك ضمن الجدول التالي:

جدول رقم (4-35)

مراكز الاستلام \ المواقع الانتاجية	B_1	B_2	B_3	العرض a_i
A_1	4 -λ -		+ 6 +λ	10
A_2	λ +		- 2 - λ	7
الطلب b_j	4	5	8	17 \ 17

من الجدول (4-35) يتضح أن:

$$X_{21} = \lambda = Min(4.2) = 2$$

والمطلوب هنا هو تعديل كميات النقل في الجدول (4-35) بمقدار قيمة λ (حيث أن: $\lambda = 2$) كما هو واضح في الجدول التالي:

جدول رقم (4-36)

مراكز الاستلام \ المواقع الانتاجية	B_1	B_2	B_3	العرض a_i
A_1	3 2	2 0	1 8	10
A_2	4 2	2 5	3 0	7
الطلب b_j	4	5	8	17 \ 17

إن قيمة دالة الهدف في ظل النتائج الواردة في الجدول (4–36) هي كما يلي:

$= 2.3 + 1.8 + 4.2 + \ 2.5 = 32Z$

إن القيمة السابقة لدالة الهدف كانت 34، حيث أن الفرق البالغ 2 وحدة عن دالة الهدف الحالية فتأتي من حاصل ضرب الكلفة $K_{21} = 1$ في كمية البضاعة المنقولة في المربع الذي يحوي المتغير X_{21} (أي أن : $X_{21} = 2$) حيث نحصل على النتيجة التالية:

34 قيمة دالة الهدف السابقة.

2– الفرق في الكلفة (1 – X 2).

32 قيمة دالة الهدف الحالية.

تجري عملية أخرى يتم بموجبها التأكد من أن الحل الذي تم الحصول عليه هو الحل الأمثل أم لا. فإذا كانت الكلفة للمتغيرات غير الأساسية ذات إشارة موجبة فإن ذلك يعني أن الحل الذي تم الحصول عليه هو الحل الأمثل. ويعتبر الحل غير أمثلاًإذا كانت الإشارة سالبة ويتطلب الأمر عند ذلك المضي في إجراءات تحسينه. ويتم ذلك من خلال حساب قيمة Kij للمتغيرات الأساسية وغير الأساسية في جدول النقل.

إن إعادة حساب قيمة K_{ij} تبدأ في الجدول التالي:

جدول رقم (4-37)

المواقع الانتاجية \ مراكز الاستلام	B_1	B_2	B_3	العرض a_i
A_1	3 X_{11}	2 X_{12}	1 X_{13}	a_1
A_2	4 X_{21}	2 X_{22}	3 X_{23}	a_2
الطلب b_j	b_1	b_2	b_3	17 \ 17

في الجدول (4-37) يتضح أن:

$X_{23}, X_{22}, X_{13}, X_{11}$ ⟵ متغيرات أساسية

$X_{21}, X_{12},$ ⟵ متغيرات أساسية

1) لكل قيم X_{ij} الأساسية (X_{23} , X_{22} , X_{13} , X_{11}) يتم إجراء الحسابات اللازمة (على افتراض أن $V_1 = 0$) وذلك لإيجاد قيم V_i , u_j الجديدة كما يلي:

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{11}:

$$K_{11}=C_{11}-(V_1+u_1)$$
$$0=3-(0+u_1)$$
$$u_1=3 \therefore$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{13}:

$$K_{13}=C_{13}-(V_1+u_3)$$
$$0=1-(0+u_3)$$
$$u_3=1 \therefore$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{21}:

$$K_{21}=C_{21}-(V_2+u_1)$$
$$0=4-(u_2+3)$$
$$u_2=1$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{22}:

$$K_{22}=C_{22}-(V_2+u_2)$$
$$0=2-(1+u_3)$$
$$u_2=1$$

2- لكل قيم X_{ij} غير الأساسية (X_{23} , X_{12})، يتم إجراء الحسابات اللازمة لإيجاد قيم K_{ij} الجديدة، وذلك كما يلي:

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{12}:

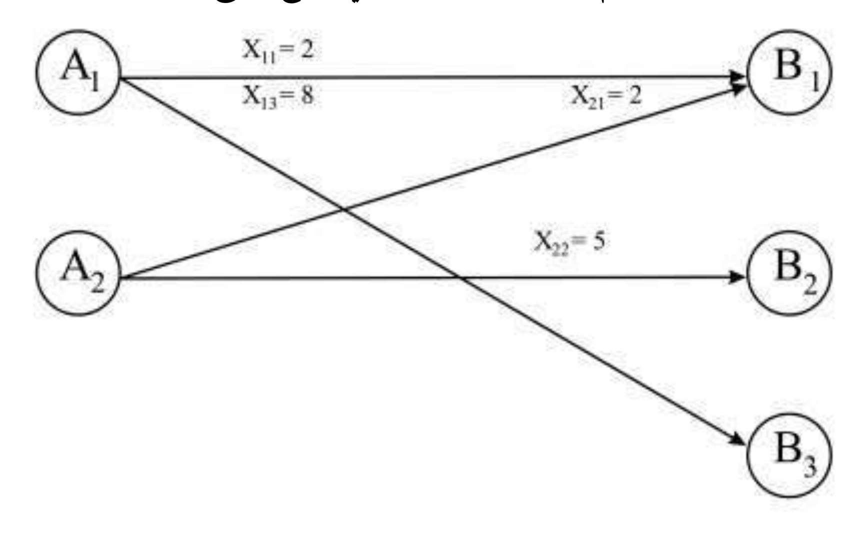
$$K_{12} = C_{12} - (V_2 + u_2)$$
$$K_{12} = 2 - (0 + 1)$$
$$K_{12} = 1$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{23}:

$$K_{23} = C_{23} - (V_2 + u_3)$$
$$K_{23} = 3 - (1 + 1)$$
$$K_{23} = 3 - 2 = 1$$

ولما كانت قيم K_{ij} لكل من X_{12} , X_{23} هي قيم موجبة ، لذلك فإن الحال السابق الموضح بالجدول (36.4) يعتبر هو الحل الأمثل. ويمكن توضيح مسارات النقل بموجب الحل الأمثل الوارد في الجدول المذكور كما يلي:

الشكل رقم (9.4) مسارات النقل التي توضع النتائج النهائية



إن التكاليف الكلية للنقل في ظل خطة النقل الموضحة بالشكل (4-9) هي 32 وحدة نقدية.

3.4. تحديد خطة النقل المثلى في مشاكل النقل المفتوح

إذا كان العرض من البضاعة المطلوبة يساوي الطلب عليها، أو بعبارة أخرى عندما تكون مجموع الكميات المرسلة أو المسوقة يساوي مجموع الكميات المستلمة المطلوبة فإن بالإمكان التعبير عن ذلك من خلال العلاقة الرياضية التالية[1]:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

تعبر هذه العلاقة عن نوع معين من مشاكل النقل يطلق عليه اسم: النقل المغلق. وهو ذلك النوع من المشاكل الذي تتساوي فيه الكميات المعروضة من البضاعة في مراكز التوزيع مع الكميات المطلوبة في مراكز الاستلام.

أما إذا كانت مجموع الكميات المعروضة في مراكز التوزيع لا تساوي مجموع الكميات المطلوبة من قبل مراكز الاستلام، فإن بالإمكان التعبير عن ذلك رياضياً كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$$

إن هذه الحالة، يمكن تجزئتها إلى ما يلي:

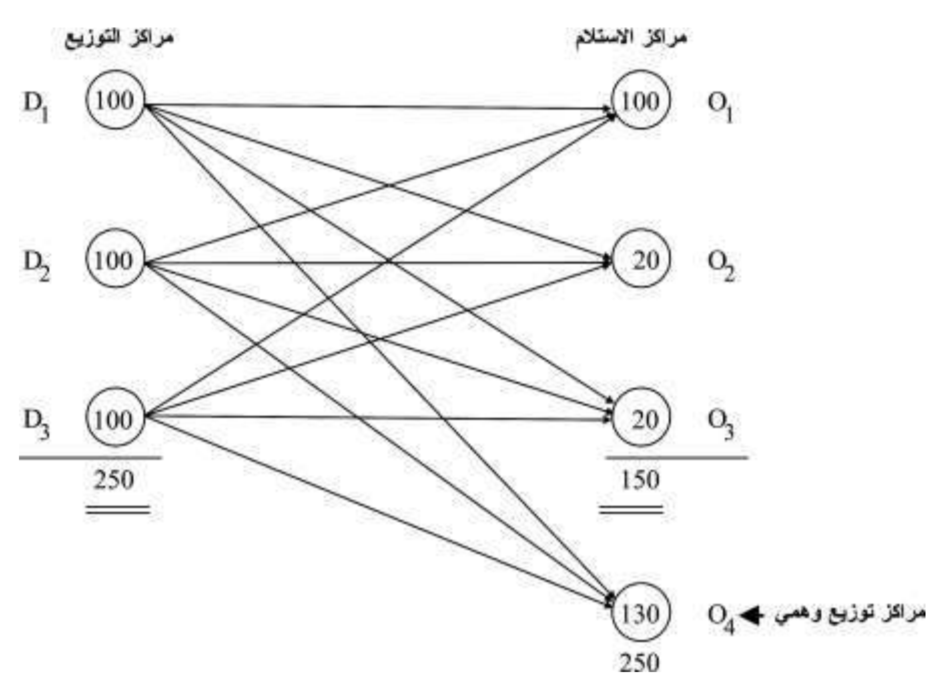
1- عندما يكون العرض أكبر من الطلب، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

([1]) W. Grabowski , Progamowanie Matematyczne. pwE, W-wa 1980 .p.146.

ويتطلب الأمر في هذه الحالة افتراض مركز استلام وهمي يأخذ الكمية من البضاعة التي تمثل الفرق بين الكمية المعرضة في مراكز التوزيع والكمية المستلمة في مراكز الاستلام، كما هو واضح في المثال المعبر عنه بالشكل التالي [1]:

الشكل (4-9) مسارات النقل عندما يكون العرض أكبر من الطلب ويتم افتراض مركز استلام وهمي:



2- عندما يكون العرض أقل من الطلب، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$$

(1) W. Grabowski., op., en.pp.148.

ويتطلب الأمر في هذه الحالة افتراض مركز توزيع وهمي يكلف بإرسال كمية من البضاعة تمثل الفرق بين الكمية المعروضة في مراكز التوزيع، والكمية المستلمة في مراكز الاستلام كما هو واضح في المثال الموضح على الشكل التالي:

الشكل رقم (4-11)

مسارات النقل عندما يكون الطلب أكبر من العرض ويتم افتراض مركز استلام وهمي

مراكز التوزيع مراكز الاستلام

D_1 50 100 O_1

D_2 50 100 O_2

D_3 50 100 O_3

250 300

مراكز توزيع وهمي ◄ D_4 100 03

250

بعد أن يتم افتراض مركز الاستلام الوهمي في الحالة الأولى ومركز التوزيع الوهمي في الحالة الثانية تصبح المشكلة من مشاكل النقل المغلق. ولغرض حل هذه المشكلة يتم تطبيق النماذج الرياضي التي سبق وإن تم توضيحها في الطرق للمستخدمة في إيجاد الحل الابتدائي الممكن وكذلك في الطرق المستخدمة في تحسين الحل الابتدائي في سبيل إيجاد الحل الأمثل.

لتوضيح فكرة النقل المفتوح والإجراءات المتبعة فيه نعرض أدناه إحدى المشاكل المتعلقة بنقل الوقود إلى محطات توليد الطاقة الكهربائية.

مشكلة رقم (1): هناك أربعة محطات كهربائية E_1 , E_2 , E_3, E_4 يتم تجهيزها بالوقود اللازم لذلك وهو الفحم الحجري من قبل أربعة مناجم فحم وهي على التوالي: K_1 , K_2 , K_3, K_4 وهي موزعة في عدة مناطق جغرافية وأن بيانات هذه المشكلة تتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-39) بيانات المشكلة

المحطات الكهربائية / مناجم الفحم	E_1	E_2	E_3	E_4	الطاقة الاستخراجية لكل منجم فحم (طن) a_i
K_1	8	9	12	5	$a_1 = 10$
K_2	4	8	5	9	$a_2 = 19$
K_3	5	9	7	1	$a_3 = 11$
K_4	1	2	6	3	$a_4 = 9$
حاجة المحطات للفحم (طن) b_j	$b_1=8$	$b_2=7$	$b_3=12$	$b_4=15$	49 / 42

المطلوب: طلبت المنظمة من إدارة التسويق والنقل دراسة المشكلة من أجل وضع خطة نقل لنقل الفحم من المناجم إلى المحطات الكهربائية بحيث تكون التكاليف الكلية للنقل أقل ما يمكن.

الحل: بما أن الطاقة الاستخراجية الكلية للمناجم هي أكبر من حاجة المحطات الكهربائية، لذلك فإن المشكلة المذكورة هي من مشاكل النقل المفتوح. ويتطلب الأمر هنا تحويل المشكلة إلى أسلوب النقل المغلق، ويتم ذلك من خلال اعتماد محطة كهربائية افتراضية E_5 تحمل طلب مقداره 7 طن وهو الفرق بين الطاقة الاستخراجية للمناجم وحاجة المحطات الكهربائية.

إن نقطة الاستلام E_5 تبعد بمسافة مقدارها صفر عن المناجم الأربعة السالفة الذكر K_1 , K_2 , K_3 , K_4 ولذلك فإن تكاليف النقل تساوي صفراً أيضاً. ويمكن توضيح ذلك من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-39) بيانات المشكلة المعدلة

المحطات الكهربائية / مناجم الفحم	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	الطاقة الاستخراجية a_i
K_1	8	9	12	5	0	10
K_2	4	8	5	9	0	19
K_3	5	9	7	1	0	11
K_4	1	2	6	3	0	9
حاجة المحطات b_j	9	7	12	15	7	49 / 49

إن مصفوفة التكاليف للمشكلة هي كما يلي:

$$C=\begin{bmatrix} 8 & 9 & 12 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 9 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

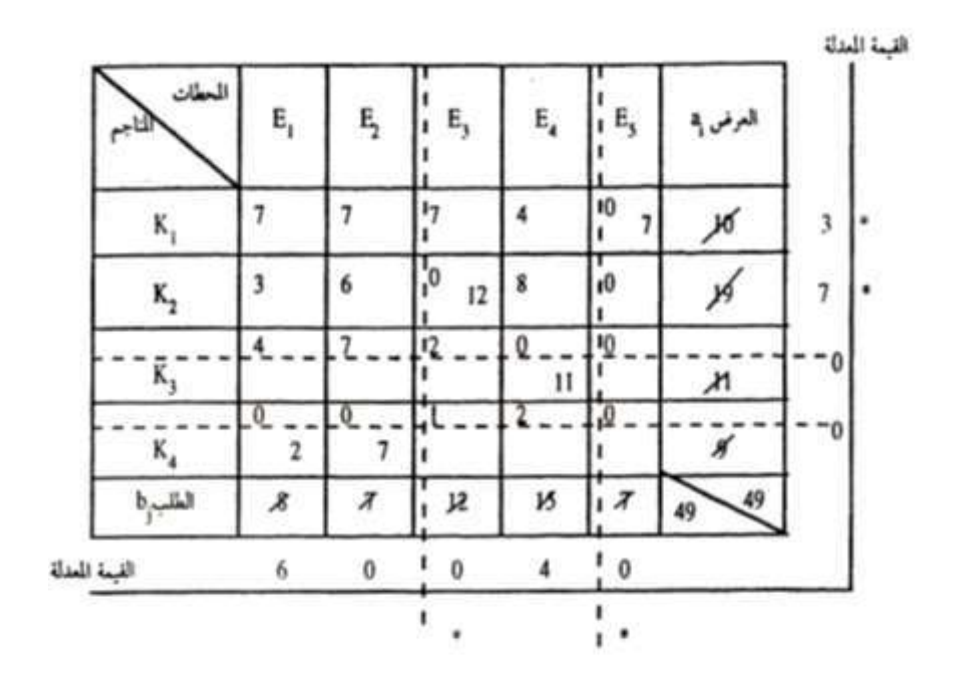
من المصفوفة C يتم الحصول على المصفوفة C^1 وذلـك بالاسـتناد إلى النظريـة العامة والمخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-3) وذلك كما يلي:

$$C^1 = \begin{bmatrix} 7 & 7 & 7 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 8 & 0 \\ 4 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

إن تكاليف النقل الكلية سوف تكون أقل ما يمكـن، لـو أن كافـة عمليـات النقل ($X_{ij} > 0$) تتم طبقاً للعناصر الصفرية الموجودة في المصفوفة C^1.

وبالاعتماد على المخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-4) تنفذ عملية النقـل طبقاً للعناصر الصفرية الموجودة في المصفوفة C^1 وذلك كما يلي:

جدول رقم (4-40)



الناجم / المحطات	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	العرض a_i	القيمة المعدلة
K_1	7	7	7	4	0 7	~~10~~	3
K_2	3	6	0 12	8	0	~~19~~	7
K_3	4	7	2	0 11	0	~~11~~	0
K_4	0 2	0 7	1	2	0	~~9~~	0
الطلب b_j	~~8~~	~~7~~	~~12~~	~~15~~	~~7~~	49 / 49	
القيمة المعدلة	6	0	0	4	0		

مـن الجـدول رقـم (4-40) يتضـح أن هنـاك كميـات غـير مسـتغلة مـن البضاعة المعروضة في المناجم. وبنفس الوقت هناك طلـب عليهـا لا يـزال غـير مشيعاً. وهذا يعني أن الحل الوارد في الجدول المذكور ليس بالحل الأمثل. لذلك يتطلب الأمر تحسين الحل الحـالي طبقـاً للقواعـد التـي تـم اعتمادهـا في الأمثلـة السابقة. وهـذه القواعـد تتمثـل بـالمخطط الانسـيابي الموضـح بالشـكل (4-5) ويؤدي العمل بموجبها إلى تنظيم الجدول التالي:

جدول رقم (4-41)

المحطات / المناجم	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	المعرض a_i
K_1	4	4	7	1	0	3
K_2	0 ⊕ (+6)	3	0	5	0	⊖ (-6) 7
K_3	4	7	5	0	3	0
K_4	0	0	4	2	3	0
الطلب b_j	(-6) ⊖ 6	0	0	4	0	10 / 10

من الجدول (4-41) يتضح أن المربع الذي يحوي (a_i) (وهو المقـدار 7) يـتم سحب الكمية 6 لكي ترسل إلى المحطات التـي تحتـاج إلى الكميـة المـذكورة. إن الاسـتمرار في تطبيـق المخطـط الانسـيابي الموضـح بالشـكل (4-5) يـؤدي إلى الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (4-42)

المحطات / المناجم	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	المعرض a_i	
K_1	4	4	7	[1]	0	3	*
K_2	0	3	0 12	5	0	1	*
K_3	4	7	5	0	3	0	
K_4	0	0	4	2	3	0	*
الطلب b_j	0	0	0	4	0	4 / 4	
	*	*	*		*		

الحل الوارد في الجدول (4-42) لا يزال غير أمثلاًلوجود كميات غير موزعة وأن هناك حاجة غير مشبعة. ويتطلب الأمر تحسين الحل المذكور ويتضح ذلك من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-43)

المحطات / المناجم	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	المعرض a_i
K_1	4	4	7	+1 ⊕ 0 (+3) ⊕	0 (-1) ⊖ 7	(-3) ⊖ 3
K_2	0 6	3	0 12	4 α_2 α_3	0 (+1) ⊕	(-1) ⊖ 1
K_3	5	8	6	0 11	4	0
K_4	0 2	0 7	4	1	3	0
الطلب b_j	0	0	0	⊖ (-4) ⊖ 4	0	4 / 4

إن نتائج التعديلات التي جرت في الجدول السابق يمكن توضيحها من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-44)

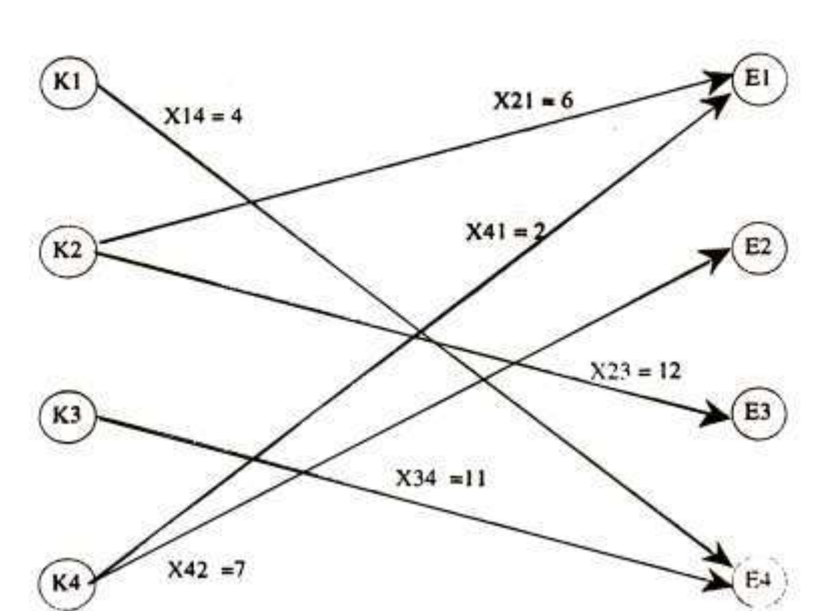
المحطات / المناجم	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	العرض a_i
K_1	4	4	7	0 4	0 6	0
K_2	0 6	3	0	4	0 1	0
K_3	5	8	6	0	4	0
K_4	0 2	0 7	4	1	3	0
الطلب b_j	0	0	0	0	0	0 0

إن خطة النقل المثلى يمكن عرضها من خلال المصفوفة التالية:

$$C^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 6 & 0 & 12 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 11 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ضمن خطة النقل المثلى هذه هناك طاقة غير مستغلة وهي 6 طن في المنجم K1 و1 طن في المنجم K2. إن مسارات النقل التي تعبر عن هذه الخطة هي:

الشكل (4-12) مسارات النقل التي تعبر عن خطة النقل المثلى



مقدار التكاليف الكلية للنقل التي يعبر عنها من خلال دالة الهدف يتم حسابها كما يلي:

$$Z = 5 X 4 + 4 X 6 + 5 X 12 + 1 X 11 + 1 X 2 + 2 X 7 = 131$$ دينار

4.4. تحديد خطة النقل المثلى مع عدم صلاحية مسار معين:

في بعض حالات النقل تواجه إدارة المنظمة التي تبحث في بدائل المسارات الممكنة لعملية النقل مشكلة عدم صلاحية مسار معين للنقل. أو بعبارة أخرى، إن مسار معين يكون بحالة مغلقة لا يمكن المرور من خلاله. في هذه الحالة يستلزم الأمر إدخال شرط إضافي حول عدم إمكانية النقل عبر مسار معين يربط بين موقع إنتاجي معين ومركز الاستلام (أو مركز بيع معين) وتفسير هذه الحالة

يعـود إلى أن هنـاك صـعوبة في المواصـلات ناجمـة مـن مواقـع جغرافيـة، أو أن البضاعة المنقولة لا تتفق مع بعضها البعض (مواد كيماوية قابلـة للاشـتعال ومـا شابه ذلك). وبناء على ذلك يكون ضمن خطة النقل المثلى مقدار الكمية المنقولـة في المسار X_{ij} المغلق مساوياً إلى الصفر.

إن إضافة شرط $X_{ij} = 0$ بالنسبة لمسار معين والذي يعني أن هنالك صعوبة نقـل في بعض المسارات المغلقة، لا يعني أن ذلك تبسيط للمشكلة قيـد الـدرس، بـل هـو تعقيداً لها. إن الإجراء الافتراضي الذي ينبغي اعتماده لحل هذه المشـكلة، هـو جعـل كلفة النقل هذا المسار عالية جداً بالشكل الذي لا يشجع عـلى سـلوك هـذا المسـار. عند معالجة هذا النوع من المشاكل باسـتخدام الحاسـبة الإلكترونيـة فـإن البرنـامج الرياضي المعد لحل هذا النوع من المشاكل، يقوم باستبعاد هذا النـوع مـن المسـارات ذاتياً بالاستناد إلى مؤشر معين وهو تكاليف النقل التي تكون عالية جداً.

المشكلة الموضحة أدناه تعرض هذا النوع مـن المشـاكل مـع بيـان المعالجـات الممكنة في سبيل بلوغ الحل الأمثل المطلوب.

مشكلة رقم (1): منظمة أعمال إنتاجية متخصصة في أعـمال البنـاء تملـك ثـلاث مناجم لاستخراج الحصو وهي A_1 , A_2 , A_3، بعد أن يستخرج الحصو، يـتم نقله إلى مواقع للبناء وهي على التـوالي B_1 , B_2 , B_3, B_4إن إنتـاج الحصـو في المناجم الثلاث هو 40 ، 34، 46 يومياً، أما الحاجة إلى الحصو في مواقـع البنـاء هي كما يلي طن 45 ,30 ,35 ,40.

إن تكاليف استخراج الطن الواحد من الحصو وهو (3) وحدة نقدية من المناجم الثلاث المذكورة على التوالي.

إن كلفة نقل الطن الواحد في الحصو من المناجم الثلاث إلى مواقع البناء الأربع هي كما في مصفوفة الكلفة التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

عند الحاجة لكميات الحصو يكون أمام متخذ القرار اختيار أحد البدائل التالية:

البديل الأول: اتخاذ القرار بزيادة الطاقة الإنتاجية من المنجم الأول. ويؤدي ذلك إلى زيادة التكاليف الاستخراجية بمقدار 3 وحدة نقدية عن كل 1 طن إضافي من الحصو.

البديل الثاني: اتخاذ القرار باستثمار منجه جديد، ويترتب على ذلك تحقق تكاليف جديدة مغايرة لما ورد أعلاه. حيث أن تكاليف المنجم الجديد تتألف من البنود التالية:

1- كلفة استخراج الطن الواحد من الحصو يساوي 5 وحدة نقدية.

2- تكاليف نقل الطن الواحد من الحصو من المنجم المذكور إلى مواقع البناء التي هي: 1 ، 3 ، 2 هذا مع العلم أن موقع البناء الرابع B_4 لا يمكن الوصول إليه من المنجم الجديد.

المطلوب: طلب إدارة المنظمة مـن إدارة التسـويق والنقـل (بالتعـاون مـع إدارة الإنتاج) دراسة المشكلة من أجل وضع خطة نقل مثلى للحصـو مـن المنـاجم الثلاث إلى مواقع البناء الأربع بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن.

الحل: من تحليل منطوق المشكلة، يتضح أن:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$$

حيث أن:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 120$$

وأن:

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 150$$

ويتطلب الأمر هنا افتراض مركز توزيع وهمي نرمز لـه FD، وتكـون الطاقـة الإنتاجية لهذا المنجم 30 طن. حيث أن المربع الذي يخصص للمنجم FD الوهمي يستخدم مرة على أساس أنه يمثل البـديل الأول وهـو زيـادة الطاقـة الإنتاجيـة للمنجم الأول. ومرة يستخدم على أساس أنه يمثل البـديل الثـاني وهـو بمثابـة استثمار لمنجم جديد.

إن احتساب التكاليف (كلفة الاستخراج + كلفة النقل) لهذه المشكلة هو كـما يلي:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4+2 & 3+2 & 2+2 & 5+2 \\ 1+3 & 1+3 & 6+3 & 4+3 \\ 3+1 & 5+1 & 9+1 & 4+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 6 & 5 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 10 & 5 \end{bmatrix}$$

مصفوفة كلفة النقل — يضاف إليها تكاليف الاستخراج — مصفوفة التكاليف الكلية

أما احتساب التكاليف بالنسبة للمربع الذي يحوي FD فإن ذلك يقسم إلى ما يلي:

1- في ظل البديل الأول وعندما تتخذ المنظمة قراراً بزيادة الطاقة الإنتاجية للمنجم الأول، فإن كلفة استخراج ونقل الحصو في المنجم الوهمي FD، هي نفس تكاليف المنجم الاول يضاف إليها 3 وحدة نقدية، أي أن:

$$[6 \quad 5 \quad 4 \quad 7] \longrightarrow [9 \quad 8 \quad 7 \quad 10]$$

تكاليف المنجم الأول زائداً 3 وحدة نقدية   تكاليف المنجم الأول

1- في ظل البديل الثاني عندما تتخذ إدارة لمنظمة قراراً باستئجار منجم جديد، فإن FD الذي يعبر عن هذا القرار تكون له تكاليف يتم احتسابها كما يلي:

$$[2 \quad 3 \quad 1 \quad \infty] \longrightarrow [7 \quad 8 \quad 6 \quad \infty]$$

يضاف إلى ذلك كلفة استخراج   كلفة نقل الطن الواحد ة

الطن الواحد والذي يبلغ 5 وحدة نقدية.

وبناءاً على ما تقدم، يكون أمام متخذ القرار ما يلي:

جدول النقل في ظل البديل الأول:

جدول رقم (4-45)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i
A_1	6	5	4	7	46
A_2	4	4	9	7	34
A_3	4	6	10	5	40
FD	9	8	7	10	30
الطلب b_j	40	35	30	45	150 / 150

بيانات المشكلة الموضحة بالجدول (4-45) تدل على أنها أصبحت من مشاكل النقل المغلق. ويتم إيجاد الحل الابتدائي الأساسي (الممكن) لهذه المشكلة باستخدام أحد الطرق التالية:

1- طريقة الركن الشمالي الغربي.

2- الطريقة العشوائية.

وبعدها يتم حساب الحل الأفضل باستخدام أحد الطرق التالية:

1- طريقة العنصر الأقل كلفة.

2- طريقة فوجل.

أولاً: استخدام طريقة الركن الشمالي الغربي في معالجة المشكلة يؤدي إلى الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (4-46) الحل باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i
A_1	6 40	5 1	4 5	7	46
A_2	4	4 34	9	7	34
A_3	4	6	10 25	5 15	40
FD	9	8	7	10 30	30
الطلب b_j	40	35	30	45	150 / 150

قيمة دالة الهدف بموجب هذه الطريقة هي $Z = 1026$

ثانياً: استخدام طريقة العنصر الأقل كلفة من معالجة المشكلة يؤدي إلى الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (4-47) الحل باستخدام طريقة العنصر الأقل كلفة

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i
A_1	6	5 1	4 30	7 15	46
A_2	4	4 34	9	7	34
A_3	4 40	6	10	5	40
FD	9	8	7	10 30	30
الطلب b_j	40	35	30	45	150 / 150

قيمة دالة الهدف بموجب هذه الطريقة هي: $Z = 850$

الخطوة التالية يتم بموجبها تحسين الحل الأفضل السابق باستخدام أحد الطرق التالية:

1- طريقة فورد – فلوركسن.

2- طريقة التوزيع المعدل.

ولو تم اعتماد طريقة التوزيع المعدل في حل هذه المشكلة، فإن العلاقة الرياضية الأساسية التي ينبغي العمل بموجبها هي:

$$K_{ij}=C_{ij}-(V_i+u_j)$$

يتم حساب قيمة u_j , V_i بالاعتماد على الجدول (4-47) الذي تم فيه الحصول على الحل الأفضل وذلك لكل قيم X_{ij} الأساسية وهي X_{44} , X_{31} , X_{22} , X_{14} , X_{13} , X_{12} وذلك على افتراض أن قيمة $V_1 = 0$.

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{12}

$$K_{12}=C_{12}-(V_1+u_2)$$
$$0=5-(0+u_2)$$
$$0=5-u_2$$
$$u_2=5$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{13}

$$K_{13}=C_{13}-(V_1+u_3)$$
$$0=4-(0+u_3)$$
$$0=4-u_3$$
$$u_3=4$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{14}

$$K_{14}=C_{14}-(V_1+u_4)$$
$$0=7-(0+u_4)$$
$$0=7-u_4$$
$$u_4=7$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{22}

$$K_{22}=C_{22}-(V_2+u_2)$$
$$0=4-(V_2+5)$$
$$0=4-V_2-5$$
$$V_2=-1$$

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{31}

لا يمكن استخراج قيم u_1 , V_3 وإن الإجراء الممكن اتخاذه في هذه الحالة هو تحريك أحد المتغيرات غير الأساسية وإدخاله إلى الأساس. وليكن ذلك المتغير X_{21} مع افتراض أن قيمة هذا المتغير تساوي صفراً (أي أن: $X_{21}=0$)[1].

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{21}

$$K_{21}=C_{21}-(V_2+u_1)$$
$$0=4-(-1+u_1)$$
$$u_1=5$$

([1]) إن هذه الحالة تعرف بالإنحلال Degeneration وفيه يكون أحد المتغيرات الأساسية تأخذ القيمة صفر لمزيد من التفاصيل انظر:

D. Rogalska. .,op. cit., pp. 206 .

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{44}

$$K_{44}=C_{44}-(V_4+u_1)$$
$$0=10-(V_4+7)$$
$$0=10-V_4-5$$
$$V_4=3$$

بعد ذلك تجري عملية حساب قيم X_{ij} غير الأساسية وذلك بهدف تحديد قيمة K_{ij} ويتم ذلك كما يلي:

- بالنسبة للمتغير الأساسي X_{11}

$$K_{ij}=C_{ij}-(V_i+u_j)$$
$$K_{11}=C_{11}-(V_i+u_j)$$
$$K_{11}=6-(0+5)$$
$$K_{11}=1$$

وبنفس الطريقة يتم تحديد قيم K_{ij} للمتغيرات غير الأساسية الأخرى أي أن:

$K_{43}=0$, $K_{42}=0$, $K_{41}=1$, $K_{34}=-1$, $K_{33}=7$, $K_{32}=2$, $K_{23}=6$

وعلى أساس هذه الحسابات يتم تنظيم الجدول التالي:

جدول رقم (4-48)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i	
A_1	6 | X_{11} | 1	5 | 1	7 | 30	7 | 15	a_1	$V_1=0$
A_2	4 | 0	4 | 34	9 | X_{23} | 6	7 | X_{24} | 1	a_2	$V_2=-1$
A_3	4 | 40	6 | X_{32} | 2	10 | X_{33} | 7	5 | X_{34} | -1	a_3	$V_3=-1$
FD	9 | X_{41} | 1	8 | X_{42} | 0	7 | X_{43} | 0	0 | 30	a_4	$V_3=3$
الطلب b_j	b_1	b_2	b_3	b_4		
	$u_1=5$	$u_2=5$	$u_3=4$	$u_4=7$		

من الجدول (4–48) يتضح أن هناك قيمة سالبة للمتغـير K_{ij} (أي أن: $K_{34} = -1$) فإن ذلك يعني أن هناك إمكانية لتحسين الحل الحالي. وتجـري عمليـات تحسـين الحل كما هو وارد في الجدول التالي:

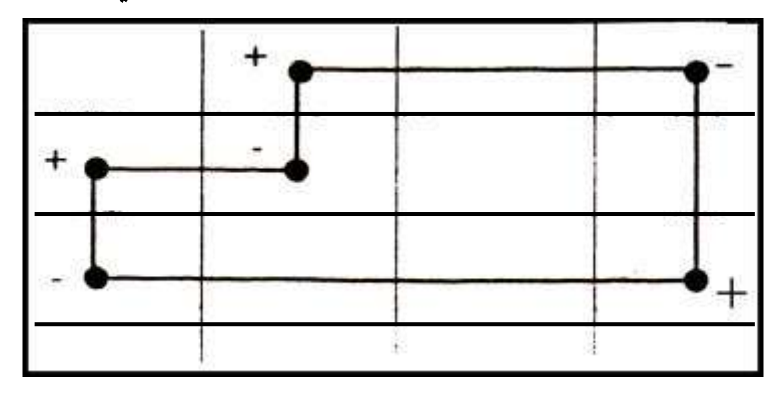
جدول رقم (4–49)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i
A_1	6	5 $1+\lambda$	4 30	7 $15-\lambda$	u_1
A_2	4 $0+\lambda$	4 $34-\lambda$	9	7	u_2
A_3	4 $40-\lambda$	6	10	5 λ	u_3
FD	9	8	7	10 30	u_4
الطلب b_j	40	35	30	45	150 / 150

إن قيمة المتغير λ تحسب من العلاقة الرياضية التالية:

$$\lambda = X_{34} = Min(40, 34, 15) = 15$$

إن مسار التغييرات يمكن توضيحها على أساس الجدول التالي:



إن النتيجة النهائية للتغيرات التي تستند إلى الجدول (4-49) والجدول (4-50) يمكن توضيحها من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-51)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i
A_1	6	5 16	4 30	7	46
A_2	5 15	4 19	9	7	34
A_3	4 25	6	10	5 15	40
FD	9	8	7	10 30	30
الطلب b_j	40	35	30	45	150 \ 150

المرحلة التالية هو إعادة الحسابات بالنسبة للمتغيرات الأساسية لتحديد قيم u_j , V_i وبالنسبة للمتغيرات غير الأساسية لتحديد قيم K_{ij} وحصيلة ذلك هو الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (4-52)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i	
A_1	6	4 16	4 30	7	46	$V_1=0$
A_2	4 15	4 19	9	7	34	$V_2=-1$
A_3	4 25	6	10	5 15	40	$V_3=-1$
FD	9	8	17 λ	10 30	30	$V_3=4$
الطلب b_j	40	35	30	45	150 \ 150	
	$u_1=5$	$u_2=5$	$u_3=4$	$u_4=6$		

إن قيمة المتغير تتحدد من خلال من العلاقة الرياضية التالية:

$$X_{43} = \lambda = Min\,(30,19\ ,\ 25) = 19$$

إن مسارات التغيير λ يمكن توضيحها على أساس الجدول التالي:

جدول رقم (4-53) مسار التغييرات

إن النتيجة النهائية للمتغيرات التي تستند إلى الجدول (4-52) والجدول (4-53) يمكن توضيحها من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-54)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i	
A_1	6 | 0	5 | 35	4 | 0	7 | 11	46	$V_1=0$
A_2	4 | 34	4 | 1	9 | 7	7 | 2	34	$V_2=-2$
A_3	4 | 6	6 | 3	10 | 8	5 | 34	40	$V_3=-2$
FD	7 | -1	8 | 1	6 | 30	M	30	$V_4=2$
الطلب b_j	40	35	30	45	150 / 150	
	$u_1=6$	$u_1=5$	$u_3=4$	$u_4=7$		

إن قيمة K_{ij} لكافة المتغيرات غير الأساسية موجبة وهذا يعني أن الحل الـذي تم الحصول عليه هو الحل الأمثل بالنسبة للجزء الاول مـن المشـكلة، وإن قيمـة دالة الهدف لهذا الجزء من المشكلة يبلغ $Z = 792$.

جدول النقل في ظل البديل الثاني:

إن جدول النقل الذي يعتبر القاعدة الأساس في حل المشكلة في ظـل البـديل الثاني هو الجدول (4–45) والذي بموجبه يـتم تطبيـق أحـد طـرق إيجـاد الحـل الأفضل وليكن ذلك طريقة العنصر الأقل كلفة، وعندها نحصل عـلى الجـدول التالي:

جدول رقم (4–55)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i
A_1	6 X_{11}	5 35	4 0	7 11	46
A_2	4 34	4 X_{22}	9 X_{23}	7 X_{24}	34
A_3	4 6	6 X_{32}	10 X_{33}	7 34	40
FD	7 X_{41}	8 X_{42}	6 30	M	30
b_j الطلب	40	35	30	45	150 \ 150

من الجدول (4–55) يتضح أن قيم المتغيرات الأساسية هي:

$X_{44} = M, X_{43}=30, X_{34} = 34, X_{31}=6, X_{21}=34, X_{14}=11, X_{13}=0, X_{12}= 35$

بصدد تفسير قيم المتغيرات الأساسية أعلاه لا بد من ذكر الملاحظات التالي:

1- إن قيمة M في المتغيرات الأساسية عالية جداً ونفرض أنها تساوي 100.

وهذه إشارة غير مباشرة إلى أن مسار X_{44} سوف يعتبر مغلقاً بسبب الارتفاع في التكاليف.

2- إن ظهور أحد المتغيرات الأساسية (X_{13}) مساوياً إلى الصفر يعني أن هناك حالة من الانحلال Degeneration في نتائج المشكلة.

إن قيمة دالة الهدف التي تعبر عن التكاليف الكلية في ظل النتائج الموضحة بالجدول (4-55) هي كما يلي:

$$Z = 35 X 5 + 0 X 4 + 11 X7 + 4 X 34 + 6 X 4 + 5 X 34 + 30 X 6$$

$$Z = 762$$

في الخطوة التالية يتم الانتقال إلى عملية تحسين الحل الابتدائي الممكن باستخدام أحد الطرق المشار إليها سابقاً وهي طريقة التوزيع المعدل.

من الجدول (4-55) يتضح أن المتغيرات الأساسية هي (X_{43} , X_{34} , X_{31} , X_{21} , X_{14} , X_{13}, X_{12}) أما المتغيرات غير الأساسية فهي (X_{42} , X_{41} , X_{33} , X_{32} , X_{24} , X_{23}, X_{22} , X_{11}) ويتم إيجاد قيم u_i , u_j لكل قيم X_{ij} الأساسية في حين يتم إيجاد قيم K_{ij} لكل قيم X_{ij} غير الأساسية. ويتضح ذلك من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (56.4)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i	
A_1	6 \ 0	5 35	4 0	7 11	46	$V_1=0$
A_2	4 34	4 \ 1	9 \ 7	7 \ 2	34	$V_2=-2$
A_3	4 6	6 \ 3	10 \ 8	5 34	40	$V_3=-2$
FD	7 \ -1	8 \ 1	6 30	M	30	$V_4=2$
الطلب b_j	40	35	30	45	150 \ 150	
	$u_1=6$	$u_1=5$	$u_3=4$	$u_4=7$		

ولما كانت أحد قيم K_{ij} $(K_{41} = -1)$ فإن ذلك يعني أن هناك إمكانية لتحسين الحل ويتم ذلك كما يلي:

جدول رقم (4-57)

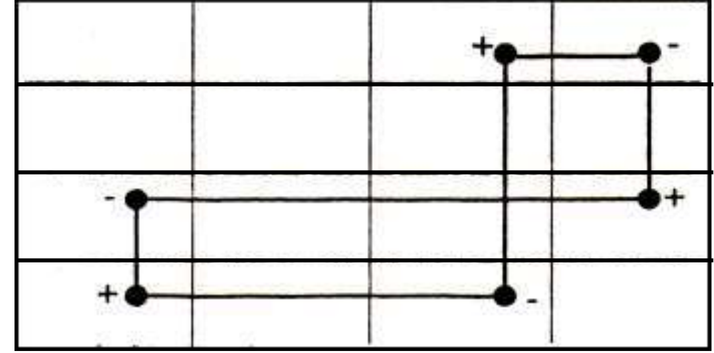
مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i
A_1	6	5	4 $0+\lambda$	7 $11-\lambda$	46
A_2	4	4	9	7	34
A_3	4 $6-\lambda$	6	10	5 $34+\lambda$	40
FD	7 $+\lambda$	8	6 $30-\lambda$	M	30
الطلب b_j	40	35	30	45	150 \ 150

إن قيمة المتغير تتضح من خلال من العلاقة الرياضية التالية:

$$X_{41} = \lambda = Min(6,\ 30\ ,\ 11) = 6$$

إن مسار التغييرات يمكن توضيحها من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-58) مسار التغييرات



إن حصيلة التغييرات المنفذة بالجدول (4-57) والجدول (4-58) يمكن توضيحها من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-59)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i
A_1	6	5 35	4 6	7 5	46
A_2	4 34	4	9	7	34
A_3	4	6	10	5 40	40
FD	7 6	8	6 24	M	30
الطلب b_j	40	35	30	45	150 / 150

بعد ذلك يجري التحقق من كون الحل الذي تم الحصول عليه هو حـل أمثـل أم غير أمثل ويتم ذلك من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-60)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	المعرض a_i	
A_1	6 ╲ 1	5 35	4 35	6 5	46	$V_1 = 0$
A_2	4 34	4 ╲ 0	9 ╲ 6	9 ╲ 6	34	$V_2 = 1$
A_3	4 ╲ 1	6 ╲ 3	10 ╲ 8	5 40	40	$V_3 = 2$
FD	7 6	8 ╲ 1	6 24	M	30	$V_4 = 2$
الطلب b_j	40	35	30	45	150 ╲ 150	
	$u_1 = 5$	$u_2 = 5$	$u_3 = 4$	$u_4 = 7$		

من الجدول (4-60) نستنتج ما يلي:

1- لا توجد قيمة سالبة للمتغير K_{ij} .

2- قيمة الحل لأحد المتغيرات الأساسـية $K_{ij} = 0$ ($K_{22=0}$) وهـذا يعنـي أن هناك أكثر من حل أمثل واحد.

إن قيمة دالة الهدف في ظل الحل الذي تم الحصول عليه من الجدول (4-60) هي:

$Z = 756$

ويمكن الحصول على حل أمثل أخر بعد القيام بمحاولة أخرى، وذلك كما في الجدول التالي:

جدول رقم (61.4)

مواقع البناء / مناجم الحصو	B_1	B_2	B_3	B_4	العرض a_i
A_1	6 \ 1	5 11	4 30	7 5	46
A_2	4 10	4 24	9 \ 6	7 \ 1	34
A_3	4 \ 1	6 \ 3	10 \ 8	5 40	40
FD	7 30	8 \ 2	6 \ 0	M	30
الطلب b_j	40	35	30	45	150 \ 150

$u_1 = 5$ $\quad u_2 = 5$

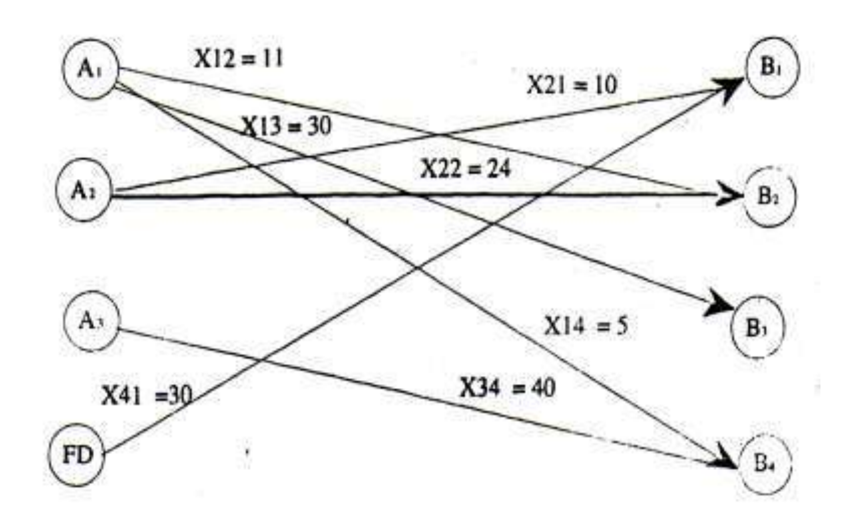
$X_{22} = \lambda = 24$

إن قيمة دالة الهدف في ظل الحل الجديد الذي تم الحصـول عليـه في الجـدول (61–4) هي:

$Z = 756$

خطة النقل التي اتخذتها إدارة التسويق والنقل تتضح من خلال الشكل التالي:

الشكل رقم (4–13) مسارات النقل التي توضح خطة النقل المثلى



مشكلة رقم (2): هناك ستة مواقع متخصصة بإنتاج المواد الأولية وهي $A_1 , A_2 , A_3 , A_4, A_5 , A_6$ تقوم بتجهيز هذه المواد إلى ثلاث مراكز استلام وهي: B_1 , B_2 , B_3 إن التجهيز الأسبوعي لكل مركز يتراوح بمعدل 50 طن من كل موقع من مواقع الإنتاج المذكورة.

إن حاجة المراكز إلى المادة الأولية هي كالآتي:

$B_1 \leftarrow 150$ طن

$B_2 \leftarrow 100$ طن

$B_3 \leftarrow 50$ طن

تكاليف النقل من مواقع التجهيز إلى مراكز الاستلام تتضح من خلال التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 10 & 13 & 20 \\ 8 & 14 & 15 \\ 30 & 40 & 50 \\ 17 & 12 & 40 \\ 25 & 16 & 21 \\ 18 & 15 & 14 \end{bmatrix}$$

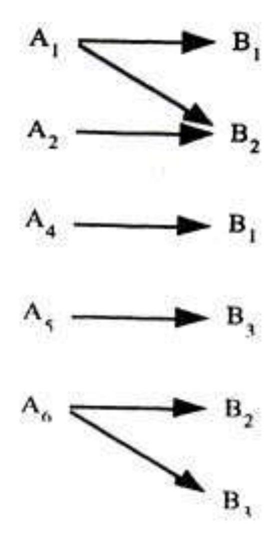
لا يمكن تنفيذ عملية النقل من بعض مواقع تجهيز المواد تجهيز المواد الأولية وذلك لأسباب كثيرة أهمها:

1- الموانع الجغرافية.

2- عدم تجانس المواد الأولية المنقولة.

ويمكن تقديم صورة عن المسارات التي لا يمكن تنفيذ عملية النقـل خلالهـا وذلك كما يلي:

الشكل رقم (4-14) مسارات النقل التي لا يمكن تنفيذ عملية نقل خلاله



المطلوب: وضع خطة نقل للمواد الأولية من مواقع التجهيز إلى مراكز الاستلام بأقل كلفة نقل كلية ممكنة.

الحل: في البداية يتم وضع الافتراضات التالية:

X_{ij} (حيث أن : $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $j = 1, 2, 3$) هـو كميـة البضـاعة المنقولة من مواقع التجهيز A_i إلى مراكز الاستلام B_j.

إن بيانات المشكلة يمكن عرضها من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (**4-62**) بيانات المشكلة[1]

مراكز الاستلام / مواقع التجهيز	B_1	B_2	B_3	المعرض a_i
A_1	∞	13	∞	50
A_2	8	14	15	50
A_3	30	∞	50	50
A_4	∞	12	40	50
A_5	25	16	∞	50
A_6	18	∞	∞	50
الطلب b_j	150	100	50	300 / 300

في الجدول (4-62) تم وضع العلامة ∞ في مكان كلفة النقل بالنسبة للمسارات التي لا يمكن تنفيذ عملية نقل خلالها. وعليه فإن مصفوفة التكاليف للمشكلة الموضحة أعلاه في منطوق المشكلة أصبحت كما يلي:

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 13 & \infty \\ 8 & 14 & 15 \\ 30 & \infty & 50 \\ \infty & 12 & 40 \\ 25 & 16 & \infty \\ 18 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

(1) الرمز ∞ يعني عدم صلاحية المسار للنقل.

بالرجوع المخطط بالشكل (4–3) والنظرية العامة يتم تحوير المصفوفة أعـلاه وعندها سوف نحصل على وذلك كما يلي:

$$C^{o} = \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & \infty & 20 \\ \infty & 0 & 28 \\ 9 & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty \end{bmatrix} \longrightarrow C^{1} = \begin{bmatrix} \infty & 0 & \infty \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & \infty & 13 \\ \infty & 0 & 21 \\ 9 & 0 & \infty \\ 0 & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

طبقاً للمخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4–3) أن تكاليف التجهيز سوف تكون أقل ما يمكن فيما لو تم القيام بهذه العمليات طبقـاً للعنـاصر الصـفرية في المصـفوفة C^1 (حيـث أن: $X_{ij} > 0$) ويمكـن توضـيح عمليـة التجهيـز والنقـل المذكورة من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4–63)

مراكز الاستلام / مواقع التجهيز	B_1	B_2	B_3	المعرض a_i
A_1	∞	0 50	∞	0
A_2	0	6	0 50	0
A_3	0 50	∞	13	0
A_4	∞	0 50	21	0
A_5	9	0	∞	50
A_6	0 50	∞	∞	0
الطلب b_j	50	0	0	

إن التجهيز والنقل الموضح بالجدول (4-63) لم يتم لكافة العناصر الصفرية الموجودة فيه إذا أن هناك مربعات فيها قيم صفرية لم يتم التجهيز والنقل فيها، وهذا يعني أن الحل الذي تم الحصول عليه ليست بالحل الأمثل. ويتطلب الأمر هنا تحسين الحل الحالي بموجب المخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-4) وكذلك المخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-5) وعندها نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (4-64)

مراكز الاستلام / مواقع التجهيز	B_1	B_2	B_3	العرض a_i	
A_1	∞	0	∞	0	*
A_2	0	6	0	0	
A_3	0	∞	13	0	
A_4	∞	0	21	0	*
A_5	[9]	0	∞	50	*
A_6	0	∞	∞	0	
الطلب b_j	50	0	0		
		*			

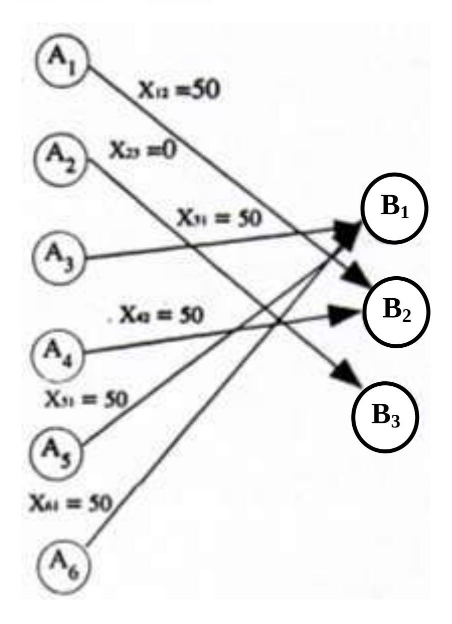
على أساس الجدول (4-64) يتم إجراء التغييرات في كميات البضاعة وذلك كما في الجدول التالي:

جدول رقم (4-65)

مراكز الاستلام / مواقع التجهيز	B_1	B_2	B_3	المعرض a_i
A_1	∞	0 50	∞	0
A_2	0	15	0 50	0
A_3	0 50	∞	13	0
A_4	∞	0 50	12	0
A_5	0 (+ 50) ⊕	0	∞	⊖ 50 (- 50)
A_6	0	∞	∞	0
الطلب b_j	50 (- 50) ⊖	0	0	

في الجـدول (4-65) يتضـح أن العمـود a_i أصـبح يحـوي قـيماً كلهـا أصـفار وكذلك الشيء بالنسبة للصف b_j . وعليه فإن الحل الذي تـم التوصـل إليـه هـو الحل الأمثل. وإن خطة النقل المثلى يمكن توضيحها من خلال الشكل التالي:

الشكل رقم (4-15) مسارات النقل التي توضح خطة النقل المثلى



إن قيمة دالة الهدف في ظل هذه النتائج تحسب كما يلي:

$$Z = 13 X 50 + 15 X 50 + 30 X 50 + 12 X 50 + 25 X 50 + 18 X 50$$
$$= 5650$$

دينار التكاليف الكلية للنقل.

5.4. مشاكل النقل متعدد المراحل

في مشاكل النقل السابقة لاحظنا أن عملية نقل البضاعة من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام تتم مباشرة، سواء كان ذلك في إطار النقل المغلق أم في إطار النقل المفتوح. إلا أن الأمر قد لا يكون بهذه البساطة، حيث أن نقل البضاعة من مركز توزيع معين في الواقع العملي يتطلب توسط جهة أخرى مساعدة تسهل عملية نقل هذه البضاعة من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام.

إن الفكرة الأساسية لهذا النوع من المشاكل تقوم على أساس أن نقل بضاعة معينة من المنتج إلى المستهلك ينبغي أن يمر من خلال مركز وسيط واحد أو

أكثر. إن أحد صيغ النقل متعدد المراحل هو وجود وسيط واحد كما هو واضح في الشكل التالي:

الشكل (4-16) مسارات النقل مع وجود وسيط واحد

من الشكل (4-16) يتضح أن عملية نقل البضاعة يتم على مرحلتين في المرحلة الأولى يتم نقل البضاعة من مراكز التجهيز D_1 , D_2 , D_3 , D_4. إلى مراكز الاستلام الوسيطة M_1 , M_2 , M_3 . وهذه بدورها تقوم بإعادة تسويق ونقل البضاعة (وقد يكون ذلك في إطار مواصفات سعرية أو نوعية وكمية جديدة) إلى مراكز استلام جديدة ألا وهي O_1 , O_2 , O_3 , O_4 التي تمثل المستهلك النهائي للبضاعة.

إن التعقيد في هذا النوع من المشاكل يعود إلى ما يلي:

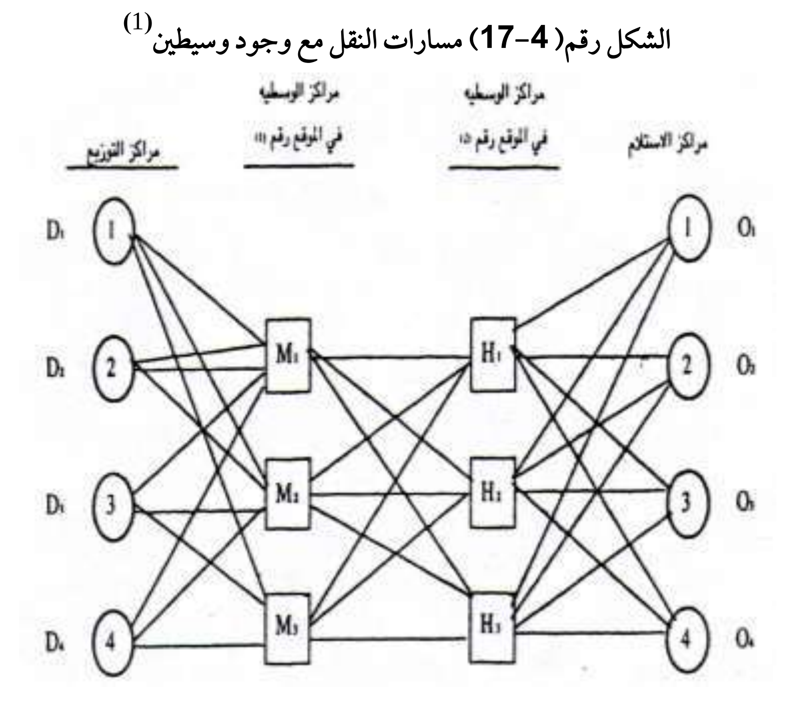
1- طول المدة الزمنية التي يستغرقها بقاء البضاعة في المراكز الوسيطة.

2- طبيعة التغيرات في المواصفات السعرية والنوعية والكمية التي يمكـن أن تحدث في البضاعة.

3- عدد المراكز الوسيطة وطول المسافة التي تفصل هذه المراكـز عـن مواقـع مركز التوزيع والاستلام.

الصـيغة الأخـرى لمشـكلة النقـل متعـدد المراحـل وهـو وجـود أكثـر مـن وسيط واحد يعمل على إيصال البضاعة من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام، حيـث يمكـن ملاحظـة هـذه الحالـة في النظـام التـوزيعي لـبعض مـنظمات الأعـمال الإنتاجيـة الخدميـة التـي لـديها فـروع وأقسـام أو وكـلا يعملـون في مواقع جغرافية مختلفة. ويمكن توضيح فكرة هذا النوع من أنـواع النقـل كـما في الشكل التالي:

الشكل رقم(4-17) مسارات النقل مع وجود وسيطين(1)



---

(1) عدد المراكز الوسيطة قد تكون أكثر من اثنين كما سنرى ذلك لاحقاً.

تستخدم النماذج الرياضية في إطار مشاكل النقل متعدد المراحل لتحديد عدد ومواقع الإنتاجية ومراكز البيع وكذلك المراكز الوسيطة بالشكل الذي يؤدي إلى تنظيم عملية انسياب البضاعة بين هذه المراكز بشكل كفوء وبأقل كلفة كلية ممكنة. أدناه أمثلة تطبيقية توضح فكرة النقل متعدد المراحل.

مشكلة رقم (1): هناك أربعة مصانع هي A_1 , A_2 , A_3 , A_4 مكلفة بتجهيز بضاعة معينة إلى عدد من المحلات التجارية وهي $B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5$ وتتم عملية التجهيز هذه على مرحلتين في المرحلة الأولى تقوم المصانع بنقل البضائع إلى ثلاث مخازن وسيطة وهي M_1 , M_2 , M_3 وهذه بدورها في المرحلة الثانية تقوم بتجهيز المحلات التجارية المذكورة وقد توفرت البيانات التالية عن المشكلة:

1- كمية البضاعة الموجودة في المصانع والمطلوب إرسالها هي:

$A_1 = 40$ طن ، $A_2 = 30$ طن ، $A_3 = 20$ طن أ $A_4 = 40$ طن

2- إن حاجة كل محل تجاري من البضاعة هي كما يلي:

$B_1 = 10$ طن ، $B_2 = 40$ طن ، $B_3 = 20$ طن ، $B_4 = 30$ طن أ $B_5 = 30$ طن

3- إن الطاقة الاستيعابية في الفترة المعينة لكل مخزن من المخازن الثلاث الوسيطة هو 100 طن من البضائع.

4- تكاليف نقل البضائع تحسب كما يلي:

أ- المرحلة الأولى حيث يتم نقل البضائع من المصانع إلى المخازن

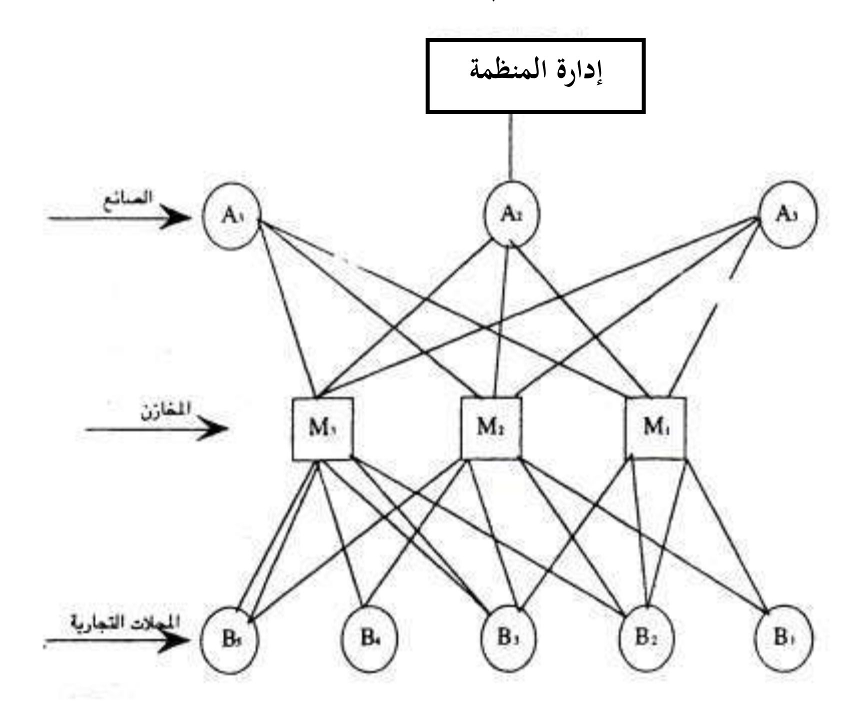
$$C=\begin{bmatrix}18 & 20 & 10\\ 30 & 25 & 8\\ 40 & 32 & 15\\ 16 & 43 & 24\end{bmatrix}$$

ب- المرحلة الثانية، حيث يتم خلالها نقل البضائع من المخازن الثلاث إلى المحلات التجارية وذلك بموجب التكاليف التالية:

$$C=\begin{bmatrix}50 & 35 & 41 & 29 & 30\\ 15 & 20 & 28 & 40 & 18\\ 19 & 41 & 52 & 30 & 26\end{bmatrix}$$

إن المخطط التوضيحي الذي للمشكلة قيد الدرس هو كما في الشكل التالي:

الشكل رقم (4-18) مسارات النقل



المطلوب: طلبت المنظمة من إدارة التسويق والنقل دراسة المشكلة المذكورة والعمل على وضع خطة النقل للبضائع بحيث تكون تكاليف النقل الكلية أقل ما يمكن.

الحل: تم وضع الفرضيات التالية:

(حيث أن: $i = 1 , 2 , 3,\ \ j = 1 , 2 ,3$) تمثل مقدار أو كمية البضاعة المنقولة ضمن المسار المبتدئ من المصنع (i) إلى المخزن (j).

(حيث أن: $K = 1 , 2 , 3,\ \ L = 1 , 2 ,3, 4, 5$) تمثل مقدار أو كمية البضاعة التي يتم نقلها ضمن المسار المبتدئ من المخزن k إلى المحل التجاري L.

a_i : كمية البضاعة المعروضة في المصنع i.

b_l : كمية البضاعة المطلوبة من قبل المحل التجاري L.

p_j : الطاقة الاستيعابية الكلية للمخزن j.

Y_j : الطاقة الاستيعابية غير المستغلة للمخزن j.

P_k : الطاقة الاستيعابية الكلية للمخزن k.

Y_k : الطاقة الاستيعابية غير المستغلة للمخزن k.

من منطوق المشكلة يتضح ما يلي:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 40 + 30 + 20 + 40 = 130$$

$$\sum_{L=1}^{5} b_L = 10 + 40 + 20 + 30 + 30 = 130$$

أي أن:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{L=1}^{5} b_L$$

وهو يعني أن المشكلة تعتبر من مشاكل النقل المغلق.

إن الطاقة الاستيعابية للمخازن الثلاث تحسب كالآتي:

$$\sum_{k=1}^{3} p_k = 100 + 100 + 0 = 200$$

من البيانات الواردة أعلاه نستنتج أن:

$$\sum_{k=1}^{3} P_k > \sum_{i=1}^{4} a_i$$

إن حل هذه المشكلة يتطلب الأمر تحديد قيمة المتغير المجهول X.

(حيث أن: X ≥ 0) وذلك في ظل الحالات التالية:

$\overset{(1)}{X} = \left[\overset{(1)}{X}_{ij} \right] \longrightarrow$ مصفوفة خطة النقل الأمثل للبضاعة ضمن المسار المتجه من المصانع إلى المخازن.

(حيث أن: i = 1, 2, 3, 4, j = 1 , 2 , 3, 4 , 5)

$\overset{(2)}{X} = \left[\overset{(2)}{X}_{kL} \right] \longrightarrow$ مصفوفة خطة النقل الأمثل للبضاعة ضمن المسار المتجه من المخازن إلى المحلات التجارية.

(حيث أن: K = 1, 2, 3, L = 1 , 2, 3 , 4 , 5)

$\overset{(2)}{Y} = \left[\overset{(2)}{Y}_{k} \right] \longrightarrow$ عناصر عمود المصفوفة الذي يمثل الطاقة الاستيعابية غير المستغلة للمخزن K (حيث أن: K = 1 , 2 , 3)

إن القيم $\overset{(1)}{X}$, $\overset{(2)}{X}$, $\overset{(2)}{Y}$ يفترض أن تكون قيم موجبة، وينبغي أن تحقق الشروط التالية:

أولاً: الشروط المتعلقة بالمسار (مصانع ← مخازن)

1- شروط المصانع التي تقوم بإرسال البضاعة

$$\sum_{j=1}^{3} \overset{(1)}{X}_{ij} = a_i$$ (حيث أن: i = 1 , 2, 3)

2- شروط المخازن التي تلعب دور الوسيط

$$\sum_{j=1}^{4} \overset{(1)}{X}_{ij} = P_j - y_i$$ (حيث أن: j = 1 , 2, 3)

ثانياً: الشروط المتعلقة بالمسار (مخازن ← محلات تجارية)

1- شروط المخازن التي تلعق دور الوسيط

$$\sum_{L=1}^{5} \overset{(2)}{X}_{kL} = P_k - y_k$$ (حيث أن: k = 1 , 2, 3)

2- شروط المحلات التجارية التي تقوم باستلام البضاعة

$$\sum_{k=l}^{3} \overset{(2)}{X}_{kl} = P_l$$ (حيث أن: L = 1 , 2, 3 , 4 , 5)

ثالثاً: الصيغة العامة لدالة الهدف

$$Z = \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{3} \overset{(1)}{C}_{ij} \; \overset{(1)}{X}_{ij} + \sum_{k=1}^{3}\sum_{L=1}^{5} \overset{(2)}{C}_{kl} \; \overset{(2)}{X}_{ij} \longrightarrow Min$$

حيث أن:

$\overset{(1)}{X}$, $\overset{(2)}{X}$, $\overset{(2)}{Y}$ يفترض أن تكون قيم موجبة وبما يجعل دالة الهدف أقل ما يمكن.

$\overset{(1)}{C}_{ij} \longrightarrow$ عناصر مصفوفة التكاليف (C_1)

$\overset{(2)}{C}_{kL} \longrightarrow$ عناصر مصفوفة التكاليف (C_2)

إن البيانات المتعلقة بالمشكلة أعلاه يتم كتابتها في جدول خاص حيث يتم تحديده من المسارات المغلقة (غير صالحة للنقل) وذلك.

1- بين المخازن ذاتها.

2- بين المصانع والمحلات التجارية مباشرة.

جدول رقم (4-66)

⊠	M_1	M_2	M_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	⊠	
A_1	18	20	10	∞	∞	∞	∞	∞	40	
A_2	30	25	8	∞	∞	∞	∞	∞	30	$a_i = 130$
A_3	40	32	15	∞	∞	∞	∞	∞	20	
A_4	16	43	24	∞	∞	∞	∞	∞	40	
M_1	0	∞	∞	50	35	41	29	30	100	
M_2	∞	0	∞	15	20	28	40	18	100	$P_K = 300$
M_3	∞	∞	0	19	41	52	30	26	100	
⊠	100	100	100	10	40	20	30	30	⊠	
	$b_J = 300$			$b_L = 130$						

إن مصفوفة التكاليف المرتبطة بجدول النقل أعلاه تكتب بالصيغة التالية:

$$C = \left[\begin{array}{c|c} C_1 & Q \\ \hline P & C_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c|cccc} 5 & 4 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 3 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \hline 0 & \infty & \infty & 4 & 1 & 3 & 2 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 3 & 5 & 2 \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{array}\right]$$

يجري تحليل هذه المصفوفة وذلك كما يلي:

(1) مصفوفة تكاليف النقل من المصانع إلى المخازن
$$C_1 = \begin{bmatrix} 18 & 20 & 10 \\ 30 & 25 & 8 \\ 40 & 32 & 15 \\ 16 & 43 & 24 \end{bmatrix}$$

(2) مصفوفة تكاليف النقل من المخازن إلى المحلات التجارية
$$C_2 = \begin{bmatrix} 50 & 35 & 41 & 29 & 30 \\ 15 & 20 & 28 & 40 & 18 \\ 19 & 41 & 52 & 30 & 26 \end{bmatrix}$$

(3) مصفوفة تكاليف النقل من المصانع والمحلات مباشرة
$$Q = \begin{bmatrix} \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

(4) مصفوفة تكاليف النقل بين المخازن ذاتها
$$P = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty \\ \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

في سبيل الحصول على الحل الممكن للمشكلة أعلاه، يتم جعل عدد لأقل قيمة صفرية واحدة في الصفوف والأعمدة لكل من المصفوفة C_1 ، C_2 (علماً بأن المصفوفة Q و P تهمل) ويتم ذلك بالرجوع إلى منطوق النظرية العامة الموضح

في بداية هـذا الفصـل والمخطـط الانسـيابي الموضـح بالشـكل (4-3) وعنـدها نحصل على ما يلي:

$$\overset{1}{C}_1 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 22 & 7 & 0 \\ 25 & 7 & 0 \\ 0 & 17 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\overset{1}{C}_2 = \begin{bmatrix} 21 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 25 & 2 \\ 0 & 17 & 21 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

يجري إحـلال عنـاصر المصـفوفة C_1^1 محـل عنـاصر المصـفوفة C_1 وعنـاصر المصفوفة $\overset{1}{C}_2$ محل عناصر C_1 المصفوفة وذلك في إطار جديد النقـل الـذي يـتم تنظيمه وفق المخططات الانسـيابية الموضـحة بالشـكل (4-4) و (4-5) وطبقـاً لطريقة العنصر الأقل كلفة. إن جدول النقل يكون كما يلي:

جدول رقم (4-67)

☒	M_1	M_2	M_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	☒
	8	0	0	∞	∞	∞	∞	∞	
A_1		40							0
A_2	22	7	0	∞	∞	∞	∞	∞	0
A_3	25	7	0	∞	∞	∞	∞	∞	0
A_4	$^{0}40$	17	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0
M_1	$^{0}60$	∞	∞	21	1	$^{0}20$	$^{0}20$	0	0
M_2	–	$^{0}60$	∞	0	$^{0}40$	1	25	2	0
M_3	–	∞	$^{0}50$	$^{0}10$	17	21	11	[6]	40
☒	0	0	0	0	0	0	10	30	☒

إن النتيجة النهائية للجدول (4-67) تتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-68)

⊠	M_1	M_2	M_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	⊠	
A_1	8	0 40	0	∞	∞	∞	∞	∞	0	
A_2	16	1	0 30	∞	∞	∞	∞	∞	0	*
A_3	19	1	0 20	∞	∞	∞	∞	∞	0	*
A_4	0 40	17	14	∞	∞	∞	∞	∞	0	
M_1	0 60	∞	∞	27	1	0 20	0 20	0	0	
M_2	∞	0 60	∞	6	0 40	1	25	2	0	
M_3	∞	∞	0 50	0 10	11	12	5	0 (+30)	(40)	
⊠	0	0	0	0	0	0	10	(30)	⊠	
				*	*			*		

$$d\alpha_1 = Min\ \{30\ ,\ 40\} = 30$$

طبقاً للقواعد المشار إليها من خلال المخططات الانسيابية نستنتج ما يلي:

1- إن الخط α_n من البداية ينطلق من المربع الموجود في الصف الذي تم تحديده الذي يحوي كمية موجبة a_i.

2- ينحرف الخط α_n من المربع الذي يحوي قيمة صفرية للمصفوفة C_1 والواقع في الصف والعمود اللذان تم تحديدها.

3- ينحرف الخط α_n هي المربع الموجود فيه كمية موجبة b_j وفي العمود الذي تم تحديده.

إن حصيلة التغيرات في الجدول (4-68) يؤدي إلى الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (4-69)

☒	M_1	M_2	M_3 0	B_1 ∞	B_2 ∞	B_3 ∞	B_4 ∞	B_5 ∞	☒	
A_1	8	0 40	∞	∞	∞	∞	∞		0	
A_2	16	1	0 30	∞	∞	∞	∞	∞	0	*
A_3	19	1	0 20	∞	∞	∞	∞	∞	0	*
A_4	0 40	17	∞	∞	∞	∞	∞	∞	0	
M_1	0 60	∞	∞	27	1	0	0 30	0 20	0	
M_2	∞	0 60	∞	6	0 40	1	25	2	0	
M_3	∞	∞	0 50	0 10	11	15	5	0 30	10	*
☒	0	0	0		0	0	10	0	☒	
			*	*						

طالما لا تزال هناك قيم موجبة في حقل الكميات المعروضة وحقـل الكميـات المطلوبة، فإن ذلك يعني أن الحل الذي تـم الحصـول عليـه لـيس أمـثلاً. لـذلك ينبغي الاستمرار في تحسين الحل الحالي، وكما يلي:

جدول رقم (4-70)

☒	M_1	M_2	M_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	☒	
A_1	8	0 40	0						0	*
A_2	15	0	0 30						0	*
A_3	18	0	0 20			∞			0	*
A_4	0	17	15						0	
M_1	0	∞	∞	28	1	0 20	0 20	0	0	
M_2	∞	0 60	∞	7	0 40	1	25	3	0	*
M_3	∞	∞	0 50	0 10	1	15	5	0 30	10	*
☒	0	0	0	0	0	0	10	0	☒	
			*	*	*	*				

جدول رقم (4-71)

☒	M_1	M_2	M_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	☒
A_1	7	$^0 40$	$^0 40$						0
A_2	14	0	0						0
A_3	17	^{0} (+10) ⊕	^{0} (-10) 20			∞			0
A_4	$^0 40$	18	16						0
M_1	$^0 60$	∞	∞	29	2	^{0} (-10) 20	^{0} (-10) 20	0	0
M_2	∞	^{0} ⊖ (-10) 60	∞	7	$^0 40$	^{0} (+10)	24	3	0
M_3	∞	∞	^{0} (+10) 50	^{0} 10	11	14	4	$^0 30$	(-10) 10
☒	0	∞	0	0			^{0} (-10) 10	0	☒

$$d\alpha_2 = Min\ \{30\ ,\ 20, 60, 20, 10\} = 10$$

إن نتيجة التغييرات في الجدول (4-71) تتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (4-72)

☒	M_1	M_2	M_3	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	☒
A_1	7	$^0 40$	0						0
A_2	14	0	$^0 30$						0
A_3	17	$^0 10$	$^0 10$			∞			0
A_4	$^0 40$	18	16						0
M_1	$^0 60$	∞	∞	29	2	$^0 10$	$^0 30$	0	0
M_2	∞	$^0 50$	∞	7	$^0 40$	$^0 10$	24	3	0
M_3	∞		$^0 60$	$^0 10$	11	14	4	$^0 30$	0
☒	0	0	0	0	0	0	0	0	☒

في الجدول (4–72) لا يوجد أي عمود يحوي قيمة موجبة. وكذلك لا يوجد صف يحوي قيمة موجبة وهذا يعني أن الحل الذي تم الحصول عليه هـو الحـل الأمثل. ويمكن توضيح الحل المذكور من خلال المصفوفات التالية:

$$\overset{(2)}{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 & 30 & 0 \\ 0 & 40 & 10 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

البضاعة المنقولة في المرحلة الثانية

$$\overset{(1)}{X} \begin{bmatrix} 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \\ 0 & 10 & 10 \\ 40 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

البضاعة المنقولة في المرحلة الأولى

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 40 \end{bmatrix}$$

الطاقة الاستيعابية غير المستغلة

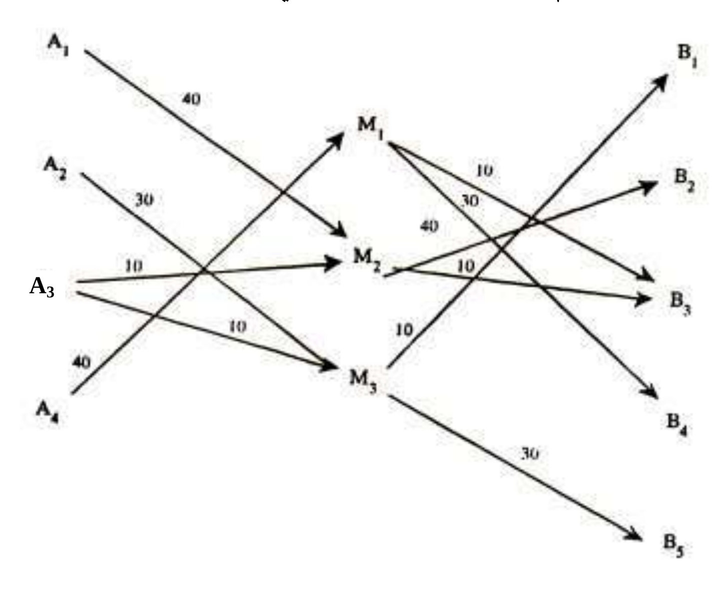
من العمود y يتضح أن الطاقة الاستيعابية غير المستغلة هي:

- المخزن $M_1 \leftarrow 40$ طـن
- المخزن $M_2 \leftarrow 50$ طـن
- المخزن $M_3 \leftarrow 40$ طـن

ويمكن عرض خطة النقل أيضاً من خلال الشكل التالي:



الشكل رقم (4-19) مسارات النقل التي تمثل الخطة المثلى للمشكلة



إن التكاليف الكلية للنقل المحسوبة في ظل خطة النقل المثلى المعبر عنها من خلال المصفوفات $\overset{(1)}{X}$, $\overset{(2)}{X}$ وكذلك العمود y والمعبر عنها أيضاً من خلال الشكل (4-19) يمكن حسابها كالآتي:

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\overset{(1)}{C}_{ij}\ \overset{(1)}{X}_{ij}+\sum_{k=1}^{3}\sum_{L=1}^{5}\overset{(2)}{C}_{kl}\ \overset{(2)}{X}_{ij}\longrightarrow Min$$

$$Z=(20\,X\,40+8\,X\,30+32\,X\,10+15\,X\,10+16\,X\,40)$$
$$+(41\,X\,10+29\,X\,30+20\,X\,40+28\,X\,10+19\,X\,10+26\,X\,30)$$
$$Z=2150+3330=5480$$

المشكلة رقم (2): إحدى منظمات الأعمال المتخصصة بإنتاج مشتقات الحليب تملك ثلاث مصانع رئيسية A_1 , A_2 , A_3 مهتمة بهذا الغرض. في المرحلة الأولى تبيع هذه المنظمة إنتاجها إلى اثنين من المخازن الوسيطة هي M_1 , M_2 التي تعمل في مناطق جغرافية متباينة.

في المرحلة الثانية يتم تسويق مختلف مشتقات الحليب من المخازن الوسيطة M_1 , M_2 إلى أربعة معارض للبيع المباشر هي B_4 , , B_3 , B_2 , B_1 وذلك في مناطق جغرافية متبأينة، وقد توفرت البيانات التالية عن المشكلة:

1- الطاقة الإنتاجية للمصانع الثلاث هي على التوالي 7 ، 6 ، 5 طن.

2- الطاقة الاستيعابية للمخازن الوسيطة هي 10 طن لكل منهما.

3- إن معارض البيع المباشر ترغب في الحصول على الكميات 3 ، 4 ، 6 طن.

4- إن كمية العرض الطلب من مشتقات الحليب ثابتة لا يمكن تغيرها.

5- تكاليف نقل البضاعة (مشتقات الحليب) من المصانع التابعة للمنظمة المذكورة إلى المخازن الوسيطة، وكذلك تكاليف نقل البضاعة من المخازن الوسيطة إلى معارض البيع المباشر تتضح من خلال الجداول التالية:

جدول رقم (4-73) تكاليف المرحلة الأولى

A_i \ M_K	M_1	M_2
A_1	5	4
A_2	3	2
A_3	6	3

جدول رقم (4-74) تكاليف المرحلة الثانية

M_k \ B_L	B_1	B_2	B_3	B_4
M_1	4	1	3	2
M_2	1	3	2	2

طلبت المنظمة من إدارة التسويق والنقل دراسة المشكلة لمعالجة ما يلي:

1- فيما يتعلق بالجزء الأول من المشكلة.

أ- من أي مصنع وبأي كمية ينبغي تنفيذ عملية التجهيز لمشتقات الحليب.

ب- من أي مصنع وبأي كمية يمكن أن تبقى طاقة إنتاجية فائضة.

2- فيما يتعلق بالجزء الثاني من المشكلة.

أ- من أي مخزن وبأي كمية ينبغي تجهيز معارض البيع المباشر من المشتقات الحليب.

ب- من أي مخزن وبأي كمية يمكن أن تبقى طاقة إنتاجية فائضة.

الحل: في البداية يتم وضع الفرضيات التالية:

$X_{ij}^{(1)}$ (حيث أن: $i = 1 , 2 , 3,\ \ j = 1 , 2 ,3$) كمية البضاعة المنقولة ضمن المسار الذي يبدأ من المصنع (i) إلى المخزن (j).

$X_{kL}^{(2)}$ (حيث أن: $K = 1 , 2 , 3,\ \ L = 1 , 2 ,3, 4, 5$) كمية البضاعة المنقولة ضمن المسار الذي يبدأ من المخزن (k) إلى المعرض L.

من منطوق المشكلة يتضح ما يلي:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 5 + 6 + 7 = 18$$

$$\sum_{L=1}^{4} b_L = 2 + 6 + 4 + 3 = 15$$

أي أن :

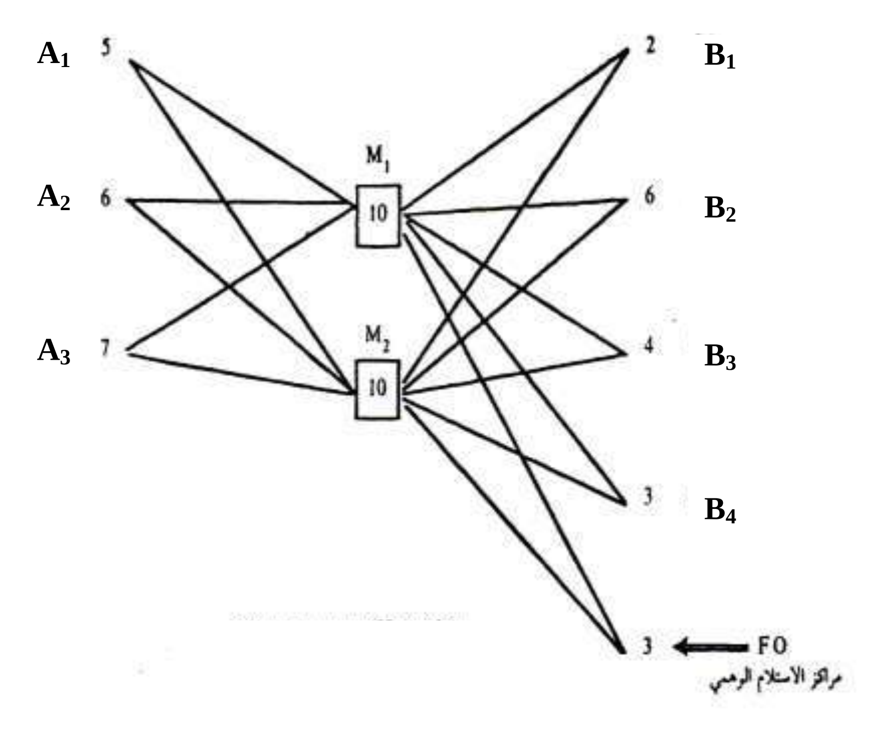
$$\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{L=1}^{4} b_L$$

ولغرض معالجة هذه الحالة يتطلب الأمر افتراض مركز استلام وليكن ذلـك FO (حيث قيمة 3 = FO):

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = FO + \sum_{L=1}^{4} b_L$$

ويمكن توضح هذه الحالة من خلال الشكل التالي:

الشكل رقم (4-20) مسارات النقل للمشكلة



بعد أن تم تحويل المشكلة من الحالة القلقلة إلى الحالة المستقرة التـي يتسـاوي فيها العرض والطلب، فإن الخطوة التالية هو تطبيق نفـس العلاقـات الرياضـية التي استخدمت في المثال السابق. ويتم في البداية تنظيم الجدول التالي:

جدول رقم (4-75) بيانات المشكلة

	M_1	M_2	FO	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	0	∞	∞	∞	∞	5
A_2	3	2	0	∞	∞	∞	∞	6
A_3	6	3	0	∞	∞	∞	∞	7
M_1	0	∞	∞	4	1	3	2	10
M_2	∞	0	∞	1	3	5	2	10
FO	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3
	10	10	3	2	6	4	3	

$a_i = 18$

$P_K = 23$

$b_J = 23$ $\quad$ $b_L = 15$

وعلى أساس الجدول (4-75) يتم تنظيم مصفوفة التكاليف التالية:

$$C = \left[\begin{array}{c|c} C_1 & Q \\ \hline P & C_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c|cccc} 5 & 4 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 2 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 6 & 3 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \hline 0 & \infty & \infty & 4 & 1 & 3 & 2 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 3 & 5 & 2 \\ \hline \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{array}\right]$$

يتم حل هذه المشكلة باستخدام أحد طرق الحل الأفضل لمشاكل النقل وهي طريقة العنصر الأقل كلفة، حيث عندها نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (4-76)

☒	M_1	M_2	FO	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5 2	4	0					5
A_2	3 1	2 5	0			∞		6
A_3	6 7	3	0					7
M_1	0	∞	∞	4	1 6	3 1	2 3	10
M_2	∞	0 5	∞	1 2	3	5 5	2	10
FO	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3
	10	10'	3	2	6	4	3	

الخطوة التالية هي تحسين الحل الوارد في الجدول رقم (4-76) وذلك باستخدام طريقة التوزيع المعدل وعندها نحصل على ما يلي

جدول رقم (4-77)

☒	M_1	M_2	FO	B_1	B_2	B_3	B_4	☒	
A_1	5 2	4 0	0 3					5	$v_1=6$
A_2	3 1	2 5	0 2			∞		6	$v_2=4$
A_3	6 7 −	0 + −2	0 −1					7	$v_3=7$
M_1	0 +	∞	∞	4 5	1 6	3 1	2 − 3	10	$v_4=0$
M_2	∞	0 − 5	∞	1 2	3 0	5 3	2 + −2	10	$v_5=2$
FO	∞	∞	∞	∞		∞	∞	3	$v_6=\infty$
	10	10	3	6	∞	4	3		
	$u_1=1$	$u_1=2$	$u_1=6$	$u_4=1$	$u_5=1$	$u_6=3$	$u_6=2$		

الخطوة التالية هي تحسين الحل الوارد في الجدول رقم (4–77) وذلك باستخدام طريقة التوزيع المعدل وعندها نحصل على ما يلي:

جدول رقم (4–78)

☒	M_1	M_2	FO	B_1	B_2	B_3	B_4	☒	
A_1	1 2	4 ⊖ 5	0 ⊖ 3					5	$u_1 = 2$
A_2	3 1	0 5 2	0 α2 −1		∞	∞		6	$u_2 = 3$
A_3	6 4	3 ⊖ 3	0 ⊖ λ					7	$u_3 = 6$
M_1	0 3	∞	∞	4	1 ⊖ 6	3 ⊖ 1	2	10	$u_4 = 0$
M_2	∞	0 2	∞	1 2	3 ⊖ λ α3 −1	5 ⊖ 3	2	10	$u_5 = 3$
FO	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	$u_6 = ∞$
☒	10	10	3	2	6	4	3	☒	
	$u_1=0$	$u_2=3$	$u_3=2$	$u_4=2$	$u_5=1$	$u_6=3$	$u_7=2$		

حيث أن: $\lambda = 3$

النتيجة النهائية لهذه المشكلة، هي كما في الجدول التالي:

جدول رقم (4–79)[1]

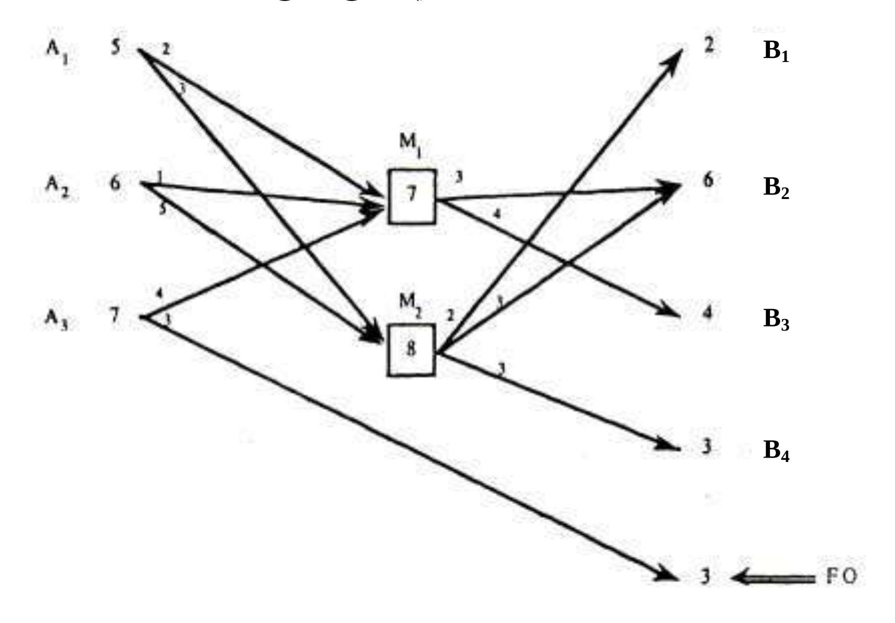
☒	M_1	M_2	FO	B_1	B_2	B_3	B_4	☒	
A_1	5 2	4 3	3 \ −1					5	$u_1 = 5$
A_2	3 1	2 5	5 0 1		∞	∞		6	$u_2 = 3$
A_3	6 4	3 \ 0	0 3					7	$u_3 = 4$
M_1	0 3	∞	∞	4 \ 0	1 3	3 4	2 \ 0	10	$u_4 = 0$
M_2	∞	0 2	∞	1 2	3 3	5 0 \ 2	2 3	10	$u_5 = 0$
FO	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	3	$u_6 = ∞$
☒	10	10	3	2	6	4	3	☒	
	$u_1=0$	$u_2=1$	$u_3=4$	$u_4=4$	$u_2=1$	$u_6=3$			

---

[1] طالما أن أحد قيم المتغيرات الأساسية تساوي صفراً، فإن هناك إمكانية للحصول على أكثر من حل أمثل واحد ونترك الأمر للقارئ الكريم للتأكد من ذلك.

من الجدول (79.4) يتضح أن كل قيم Kij موجبة عدا العمـود الـذي يحـوي FO. وهذا ليس له أهمية على نتائج الحل. لذلك فإن الحل الذي تم الحصول عليه في الجدول المذكور يعتبر بمثابة الحل الأمثـل. ويمكـن عـرض النتـائج النهائيـة للمشكلة من خلال الشكل التالي:

الشكل (21.4) مسارات النقل التي توضح النتائج النهائية للمشكلة



من الشكل (21.4) يتضح أن هناك طاقة غـير مسـتغلة في المخـازن M_2 , M_1 وذلك كما يلي:

M_1 ← 3 طن

M_2 ← 2 طن

إن دالة الهدف في ظل هذه النتائج تحسب كما يلي:

$$Z = (5X2+4X3+3X1+2X5+6X4)+$$
$$(1X2+1X3+3X3+3X4+2X3)$$

التكاليف الكلية للنقل محسوبة بالوحدات النقدية $Z = 91$

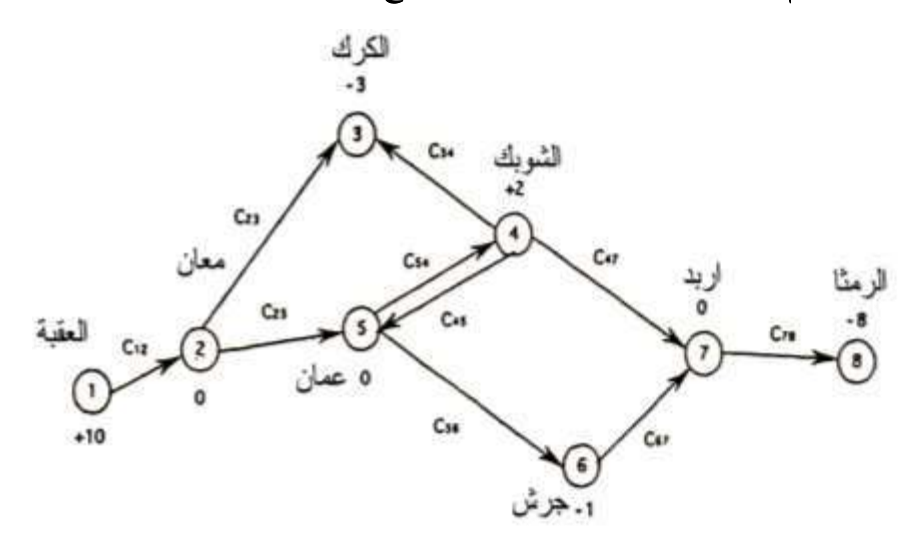
6.4. تحويل مشكلة النقل متعدد المراحل إلى مشكلة نقل عادية

إن مشكلة النقل متعدد المراحل يمكن أن تدخل في إطار أكثر تعقيداً مما مر معنا في المشكلات السابقة. إذ أن المراكز الوسيطة قد تكون منتشرة في مواقع جغرافية مختلفة الأبعاد عن بعضها البعض وكذلك عن مراكز التوزيع والاستلام وأن هناك عملية توزيع واستلام بين المراكز الوسيطة ذاتها. يضاف إلى ذلك تعقيدات أخرى يمكن أن تدخل في إطار هذه المشكلة ناجمة عن اتباع سياسة سعرية أو سياسة تسويق معينة من قبل مراكز التوزيع والاستلام والمراكز الوسيطة أيضاً وهو من شأنه أن يخلق التعقيدات المذكورة. ويعالج هذا النوع من المشاكل من خلال تحويل مشكلة النقل متعدد المراحل إلى مشكلة نقل عادية. وهناك طرق محددة تستخدم لهذا الغرض. وقبل توضيح هذه الطرق نعرض أدناه فكرة النقل المتعدد المراحل المشار إليها أعلاه من خلال المشكلة التالية:

مشكلة رقم (1): منظمة أعمال تجارية تملك ثمانية مخازن تجارية كبيرة (مراكز بيع) متمركزة في مواقع جغرافية مختلفة. مدير الدائر التجارية قرر تخفيض سعر إحدى البضائع إلى أدنى حد ممكن وذلك سعياً وراء تصريف الكميات الكبيرة المتكدسة منها. قبل أن تبدأ الحملة الإعلانية عن هذه البضاعة قررت الدائرة التجارية المذكورة البدء بتوزيع مخزون البضاعة المكدسة بين المراكز

التجارية الثمانية وذلك بما يتفق والطاقة الاستيعابية لهذه المراكز وقابليتها على تصريف البضاعة المذكورة. ويمكن توضيح فكرة هذه المشكلة من خلال الشكل التالي:

الشكل رقم (4-22) مسارات النقل متعدد المراحل مع وجود عملية نقل بين المراكز الوسيطة



إن الأرقام الموجبة في المراكز الموضحة بالشكل (4-22) تشير إلى أن هناك زيادة في مقادير البضاعة المخزونة لدى هذه المراكز بما يزيد عن حاجتها وينبغي إرسال هذه البضاعة إلى المراكز الأخرى التي هي بحاجة إليها، حيث يشار ذلك من خلال الأرقام السالبة المثبتة فوقها والتي تبين مقدار الحاجة أو العجز في البضاعة المذكورة.

من الشكل (4-22) يتضح أن المراكز التجارية التي تمتلك فائض في البضاعة هي المراكز المرقمة 1 و 4 والذي يبلغ 10 وحدة و2 على التوالي. في حين أن المراكز التجارية المرقمة 8 ، 6 ، 3 تحتاج كميات من البضاعة مقدارها على التوالي 8 وحدة، 1 وحدة، و 3 وحدة.

أما مخزون البضاعة في المراكز الأخرى فهو متعادل (والذي يشار إليه بالرقم صفر). على أساس ما تقدم وفي ضوء الشكل (4-22) يتضح أن هناك مراكز توزيع تحمل الإشارة الموجبة، وهناك مراكز استلام تحمل الإشارة السالبة، وهناك أيضاً مراكز وسيطة التي تحمل الرقم صفر. علماً بأن المركز الأول الذي يحمل الرقم (1) هو مركز توزيع ابتدائي ولديه بضاعة فائضة مقدارها 10 وحدة، وأن المركز الأخير الذي يحمل الرقم (8) والمركز والذي يحمل الرقم (3) هما مراكز استلام نهائية وهما بحاجة إلى بضاعة مقدارها 8 وحدة، 3 وحدة على التوالي.

يرتبط بعملية نقل للبضاعة من خلال المسارات الواردة في الشكل (4-22) تكاليف نقل معينة C_{ij} [حيث أن (i) هو رقم مركز التوزيع و (j) رقم مركز الاستلام]. حيث على سبيل المثال أن كلفة نقل وحدة واحدة من البضاعة من المراكز التجارية رقم (1) إلى المركز التجارية رقم (6) تحسب من حاصل جمع التكاليف التالية: $C_{12} + C_{25} + C_{56}$.

تظهر في الشبكة الموضحة بالشكل (4-22) مسار نقل مزدوج ، كما هو الحال بين المركز رقم (4) والمركز رقم (5)، وهنا ينبغي أن تحسب الكلفة للمسار المتجه من المركز رقم (4) إلى المركز رقم (4) أي C_{54} ، علماً بأن: $C_{45} \neq C_{54}$. وهكذا تستمر عملية حساب الكلف بالنسبة لكافة مسارات الشبكة. ويكون هدف منظمة الأعمال في ضوء ما تقدم هو إكمال عملية تسويق التخزين من البضاعة وتوزيعه بحيث تكون تكاليف النقل الكلية أقل ما يمكن.

إن حل هذه المشكلة كما ذكرنا أعلاه يتم من خلال تحويلها إلى مشكلة نقل عادية. وهناك اثنين من الطرق يتم بواسطتها تحقيق هذا الغرض. بموجب

الطريقة الأولى تحدد مسارات النقل التي يتم خلالها النقـل بأقـل كلفـة للوحـدة الواحدة من البضاعة. ويتم ذلك ابتدائاً من المركز رقم (1) (وهو يملـك فـائض من البضاعة)، ويستمر العمل لغاية المراكز الأخرى (3 ، 6 ، 8) التي هي بحاجة للبضاعة الفائضة. وهنا يتم استثناء دور المراكـز الوسـيطة وعـدم أخـذها بعـين الاعتبار عند توزيع البضاعة. وهـو لا يعنـي إلغـاء دورهـا بشـكل مطلـق، بـل افتراض عدم تأثيرها على حجم ومقدار البضاعة الفائضة المطلوب نقلها والتـي تبلغ 12 وحدة، حيث أن هذه البضاعة موجودة في المركز رقـم(1) والمركـز رقـم (4) وينبغي نقلها إلى المراكز رقم (3) ورقم (6) ورقم (8) التي هي بحاجة اليها، ولغرض تنفيذ عملية النقل هذه، فإن الأمر يتطلب تنظيم الجدول التالي:

جدول رقم (4-80) جدول النقل حسب الطريقة الأولى

الاستلام / التوزيع	المركز رقم (3)	المركز رقم (6)	المركز رقم (8)	العرض
المركز رقم (1)	C_{13}	C_{16}	C_{18}	10
المركز رقم (4)	C_{43}	C_{46}	C_{48}	2
الطلب	3	1	8	12 \ 12

إن المشكلة التي يتم عرضها من خلال صيغة الجـدول أعـلاه، يمكـن حلهـا وإيجاد الحل المطلوب لها باستخدام طريقة العنصر الأقل كلفة أو طريقة فوجـل. وبعد ذلك يجري تحسين الحـل الـذي يـتم الحصـول عليـه لبلـوغ الحـل الأمثـل باستخدام أحد الطرق التالية:

1- طريقة فورد – فوليكرسون.

2- طريقة التوزيع المعدل.

بموجب الطريقة الثانية لا يحتاج الأمر إلى البحث عن مسارات النقل ذات الكلفة الأقل بل هناك إجراء آخر ينبغي اتخاذه. ولبيان الإجراء المذكورة يتطلب الأمر تنظيم الجدول التالي وذلك استناداً إلى الشكل إلى (4-22).

جدول رقم (4-81)

	2	3	4	5	6	7	8	العرض
1	C_{18} X_{12}							10
2	0 X_{22}	C_{23} X_{23}		C_{25} X_{25}				12
4		C_{43} X_{43}	0 X_{44}	C_{45} X_{45}		C_{47} X_{47}		14
5			C_{54} X_{54}	0 X_{55}	C_{56} X_{56}			12
6					0 X_{66}	C_{67} X_{67}		11
7						0 X_{77}	C_{78} X_{78}	12
الطلب	12	3	12	12	12	12	8	

إن المربعات الواردة في الجدول (4-81) تمثل المسارات الممكنة، أما المربعات غير المرسومة فهي تمثل المسارات غير الممكنة، على سبيل المثال المسار بين المركز

رقم (1) ورقم (6) كما أن هناك مسارات تبدأ وتنتهـي في نفـس المراكـز المتمثلـة بالرموز X_{55} , X_{66} , X_{22} , X_{44} وتكون كلفة النقل في هذه الحالة تساوي صـفرا. وتسمى هذه بعمليات النقل الوهمية، وهي تستخدم لغرض تسهيل فكرة النقـل المتعدد المراحل.

عند مقارنة البيانـات الـواردة في الجـدول (4-81) مـع البيانـات الـواردة في الشكل (4-22) يتضح أن مقدار البضاعة المرسلة من النقطة رقم (1) في الجدول المذكور (عمود العرض) يساوي مقدار البضاعة الفائضة في المركز كما هو واضح في الشكل (4-22). وبنفس الطريقة يتم تفسير الحـالات الأخـرى، حيـث عـلى سبيل المثال وطبقاً لبيانات الجدول (4-81) إن مقدار البضاعة المطلوبة من قبـل المراكز رقم (1) ورقم (8) تساوي الحاجة المحددة على هذه المراكز كما يظهر ذلك في الشكل (4-22).

واستناداً إلى ما تقدم يمكن أن نخلص إلى نتيجة، بأن القيم الواردة في الجدول والمتعلقة بمقدار البضاعة المرسلة من أي مركز وسيط، وكذلك مقدار البضـاعة المستلمة من المركز ذاته قد تم زيادتها بمقـدار 12 وحـدة. ويسـمى هـذا المقـدار بالمخزون الموازن. وهو حصيلة الفائض في المخزون من كافـة النقـاط الأخـرى. ويتألف من حاصل جمع الفاض البالغ 10 وحدات في المركز رقم (1) والفـائض البالغ (2) نقطة في المركز رقم (4)[1].

([1]) يحسب المخزون الموازن على سبيل المثال للمركز رقم (4) بطرح مقدار البضـاعة المرسـلة وتبلـغ (14) من مقدار البضاعة الموجودة بالأصل في المركز المذكور والتـي تبلـغ (2)، أي (12 = 2- 14) ويمكن أن يأخذ المخزون الموازن أي رقم كبيرا جزء، لمزيد من التفاصيل انظر:

H.M. WAGNER, OP. Cit.,p. 206..

إن الحل الأمثل للمشكلة يكون كالآتي[1].:

1- بالنسبة للمسارات الاعتيادية، فإن قيم X_{ij} هي:

$X_{12} = 10 , X_{23} = 3, X_{25} = 7, X_{45} = 2, X_{56} = 9, X_{67} = 8, X_{78} = 8$

وتكون قيم بقية المسارات مساوية إلى الصفر أي أن: $X_{ij} = 0$

2- بالنسبة للمسارات الوهمية كما يلي:

$X_{22} = 2 , X_{44} = 12, X_{55} = 3, X_{66} = 3, X_{77} =4$

وتكون قيم بقية المسارات الوهمية مساوية إلى الصفر أي أن: $X_{kk} = 0$

إن حل هذا النوع من المشاكل غالباً ما يتم باستخدام الحاسبات الإلكترونية من خلال برامج خاصة معدة لذلك، بسبب التعقيدات وتداخل المتغيرات فيها، مما يجعل الأسلوب اليدوي في الحل غير عملي وغير دقيق في نتائجه.

([1]) يتم الحل بموجب أحد طرق إيجاد الحل السالفة الذكر.

أسئلة وتمارين الفصل الرابع

س1: ثلاثة مواقع ترسل مواد أولية نصف مصنعة إلى خمسة معامل تتوزع في مواقع جغرافية مختلفة، وقد علمت ما يلي:

1- مواقع التوزيع لديها مواد أولية كما يلي:

- الموقع .I = 500 طن
- الموقع .II = 700 طن
- الموقع .III = 900 طن

2- مواقع الاستلام (المعامل) تحتاج إلى:

- الموقع رقم (1) = 400 طن.
- الموقع رقم (2) = 400 طن.
- الموقع رقم (3) = 700 طن.
- الموقع رقم (4) = 300 طن.
- الموقع رقم (5) = 300 طن.

الجدول التالي يتضمن تفاصيل طول المسافة بين مواقع التوزيع ومواقع الاستلام (محسوبة بالكيلومترات):

مواقع التوزيع	مواقع التسليم				
	1	2	3	4	5
I	130	250	330	170	400
II	290	190	400	260	160
III	150	350	240	190	210

وقد علمت ما يلي:

1- المسافة لغاية 200 كيلو متر/ طن 8 دينار.

2- إذا زادت المسافة عن 200 كيلو متر يتم التحول إلى سيارة أخرى وتكـون عندها الكلفة هي 1 كيلو متر/ طن 6 دينار.

المطلوب: أوجد خطة النقل بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 400 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 0 & 300 & 100 \\ 0 & 0 & 700 & 0 & 200 \end{bmatrix}$$

$K(x) = 500500$ دينار

س2: ثلاثة من مخازن الموز تقوم بتجهيز أربعـة محـلات بيـع متوزعـة في مواقـع جغرافية مختلفة وتتكرر العمليـة كـل ثلاثـة أيـام، علـماً بـأن في وقـت النقـل والتسويق للموز يتلف البعض منه في الطريق. البيانات المتعلقة بهذه المشـكلة هي كما يلي:

مراكز التوزيع	مراكز الاستلام				Ai
	S_1	S_2	S_3	S_4	
H_1	2.0	3.0	4.0	1.0	2200
H_2	5.0	7.0	3.0	2.0	2000
H_3	1.0	4.0	8.0	3.0	2800
Bj	1500	1400	2600	1500	

المطلوب: تحديد خطة النقل بحيث يكون الموز الثالث أقل ما يمكن.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 100 & 600 & 1500 \\ 0 & 0 & 2000 & 0 \\ 1500 & 1300 & 0 & 0 \end{bmatrix} K(xij) = 16900$$

س3: ثلاثة من مناجم الفحم K_1 , K_2 , K_3 تقوم بتجهيز الفحم الحجري إلى خمسة مواقع لتوليد الطاقة الحرارة S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , S_5 متوزعة في مواقع جغرافية مختلفة، وأن أي من هذه المواقع يمكن أن تستقبل 400 طن شهرياً من الفحم شهرياً، بينما طاقة كل واحد من المناجم هي:

- $K_1$600 = طن/ شهرياً.
- $K_2$700 = طن/ شهرياً.
- $K_3$700 = طن/ شهرياً.

إن تكاليف استخراج 1 طن هي:

- 108 دينار في المنجم K_1
- 96 دينار في المنجم K_2 شهرياً
- 102 دينار في المنجم K_3

الجدول التالي يتضمن تفاصيل تتعلق بطول المسافة بين مواقع التوزيع ومواقع الاستلام (محسوبة بالكيلومترات):

المناجم	مواقع توليد الطاقة				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
K_1	14	5	9	24	15
K_2	30	24	11	8	19
K_3	9	22	15	7	18

المطلوب: تحديد خطة النقل بحيث تكون التكاليف الكلية للنقل والاستخراج أقل ما يمكن.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 400 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 400 & 300 & 0 \\ 400 & 0 & 0 & 100 & 200 \end{bmatrix} \quad K(x) = 223100$$ دينار

س4: توفرت لديك المتجهات والمصفوفة التالية:

$$[A_i] = \begin{bmatrix} 460 \\ 340 \\ 300 \end{bmatrix}, [B_j] = \begin{bmatrix} 350 \\ 200 \\ 350 \end{bmatrix}, [h_j] = \begin{bmatrix} 90 \\ 80 \\ 80 \end{bmatrix}, [C_{ij}] = \begin{bmatrix} 6 & 8 & 12 \\ 10 & 2 & 4 \\ 8 & 10 & 16 \end{bmatrix}$$

حيث أن:

- Ai = حجم الإنتاج في ثلاث مصانع.
- Bj = مقدار الحاجة إلى الإنتاج من قبل ثلاث مواقع استلام.
- Hi = مقدار مستلزمات الإنتاج المصروفة على الإنتاج.

• Cij = مقدار التكاليف المتعلقة بنقـل الإنتـاج مـن المصـانع (i) إلى مواقـع الاستلام (j).

المطلوب: ما هي خطة النقل التي تجعل من التكاليف الكليـة (تكـاليف الإنتـاج والنقل والتخزين لما هو فائض من الإنتاج) أقل ما يمكن، علماً بـأن تكـاليف الخزن للوحدة الواحدة في الإنتاج في كل واحدة من المصانع تبلغ عن التـوالي 232 دينار.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 350 & 100 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 340 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 200 \end{bmatrix} K(x) = 95490$$

$$X = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 10 & 200 \\ 0 & 0 & 340 & 0 \\ 0 & 200 & 0 & 0 \end{bmatrix} K(x) = 77490$$

س5: من المقرر أن يتم إقامة ثلاثة مواقع ثلاثة مواقع لإنتاج الأصـواف وذلـك لتجهيز أربعة معامل لصناعة المنتجات النسيجية المختلفـة. علـماً بـأن مواقـع إنتاج الأصواف تتواجد في مناطق جغرافيـة مختلفـة وهـي D, C, B, A. وأن الطاقة الإنتاجية لها هي على التوالي، 4000030000. 40000 , 20000 , متر.

إن المعامل التي تتولى صناعة المنتجات النسيجية قامت بتحديد حاجاتهـا مـن الأصواف على النحو التالي: 2000040000, 25000 , 15000 , متر.

إن تكاليف الإنتاج للأصواف في كل واحدة من مواقع الإنتاج هي كما يلي: 2325 ,51 ,24 ,24 , دينار. الجدول التالي يتضمن تفاصيل تتعلق بتكاليف نل الأصواف من مواقع الإنتاج إلى المعامل:

مواقع الإنتاج	معامل صناعة المنتجات الصوفية			
	1	2	3	4
A	2.5	1	5	6
B	2	0.5	3.5	4.5
C	1.5	4	3	2
D	1.5	3	2	1.5

المطلوب: وضع خطة النقل بحيث تكون تكاليف النقل والإنتاج أقل ما يمكن.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 15000 & 25000 & 0 & 0 & 0 \\ 5000 & 0 & 5000 & 0 & 30000 \\ 0 & 0 & 0 & 20000 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 20000 & 0 \end{bmatrix} K(x) = 2575000$$

س6: اثنين من المحطات لانطلاق باصات لنقل الركاب (.II,1) تنطلق منها الباصات إلى أربعة مواقع D_1 , D_2 , D_3 , D_4 المطلوب هو تنظيم مسارات النقل بحيث يكون النقل الفارغ أقل ما يمكن، البيانات المتعلقة بالمسافة وعدد الباصات موضح في الجدول التالي:

		Ai

	D_1	D_2	D_3	D_4	
I	15	12	10	17	100
II	5	18	24	7	150
Bj	40	65	45	60	

حيث أن: $\Leftarrow$ Ai عدد الباصات في المحطات (i)

Bj $\Leftarrow$ عدد المواقع

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 55 & 45 & 0 & 0 \\ 40 & 100 & 0 & 60 & 40 \end{bmatrix} K(x) = 1910$$ كيلو متر/ باص/

س7: توفرت لديك البيانات المتعلقة بأحد مشاكل النقل الفارغ.

	1	2	3	4	5	6	
1	0	8	12	21	30	14	9
2		0	20	8	10	7	11
3			0	18	11	10	10
4				0	7	12	18
5					0	19	14
6				9	7	0	18
						7	80

المطلوب: حل المشكلة بوضع خطة للنقل يكون فيها النقل الفارغ أقل ما يمكن.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

س8: الجدول التالي يتضمن المسافة بين 7 محطات تنطلق منها وسائل نقل مختلفة لنقل بضائع وسلع وقد علمت أن:

Pi = حجم الحمولات المرسلة

Wi = حجم الحمولات المطلوبة

المحطات	1	2	3	4	5	6	7	Pi
1	0	56	38	132	21	55	24	18
2		0	27	46	31	10	99	9
3			0	22	44	33	77	16
4				0	18	9	66	15
5					0	90	11	19
6						0	44	8
7							0	5
wi	0	13	22	7	7	12	9	

المطلوب: حل المشكلة بوضع خطة للنقل يكون فيها النقل الفارغ أقل ما يمكن.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 7 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$k(x) = 781$ كيلو متر/ حاوية

س9: إحدى مؤسسات النقل تملك أسطول من الشاحنات عددها 75 يستفيد منها مجموعات من العاملين في الأعمال الإنشائية في مواقع البناء، أي أن الشاحنات تخدم مواقع البناء وتنقل منه واليها مختلف المستلزمات الإنشائية والعاملين. البيانات المتعلقة بهذه المشكلة تتضح من الجدول التالي:

مواقع البناء	1	2	3	4	5	6	المعروض
1	0	15	5	50	45	20	10

2		0	2	40	25	33	15
3			0	10	15	20	15
4				0	60	45	15
5					0	24	12
6						0	8
	17	25	2	11	8	12	75

المطلوب: وضع خطة للنقل الفارغ بين مواقع البناء، بحيث تكون عدد (الكيلومترات/ وسيلة النقل) الفارغة أقل ما يمكن.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

كيلو متر/ وسيلة نقل $k(x) = 411$

س10: منظمة إنتاجية تملك جرارات تعمل بين 7 مواقع، وقد توفرت البيانات التالية عن المشكلة:

- جدول رقم (1) يتضمن مقدار البضائع التي تنتقل بين هذه المدن.
- جدول رقم (2) يتضمن المسافة محسوبة بالكيلومترات بين هذه المدن

الجدول الأول

i \ j	النقل من المدينة I إلى المدينة J						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0	5	8	11	4	6	16
2	10	0	8	7	6	5	12

3	9	4	0	5	5	10	7
4	4	3	3	0	6	9	17
5	20	15	4	9	0	8	6
6	10	9	7	8	11	0	11
7	8	7	6	5	7	9	0

الجدول الثاني

i \ j	1	2	3	4	5	6	7
1	0	18	34	55	10	21	50
2		0	53	29	64	19	10
3			0	18	33	22	14
4				0	54	9	36
5					0	13	15
6						0	19
7							0

المطلوب: تصميم خطة للنقل الفارغ، بحيث تكون عدد (الكيلو متر/ جرار) فارغ أقل ما يمكن.

النتائج النهائية:

$$k(x)\ X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 12 & 6 \end{bmatrix} = 537 \text{ كيلو متر/ جرار}$$

الفصل الخامس
نماذج النقل المحورة
في اتخاذ القرار الأمثل

5

الفصل الخامس

نمــاذج النقــل المحوره
Modificated Transportation
في اتخــاذ القرار الأمثــل

1.5. أنواع نماذج النقل المحورة المستخدمة في اتخاذ القرار الأمثل لمعالجة المشاكل المختلفة

إن هذا النوع من النماذج الرياضية مستمدة بالأصل من النموذج العام لمشكلة النقل، التي تم تقديمه في الفصل السابق، وقد جرى تطوير النموذج المذكور لكي يتلائم مع طبيعة المشكلة التي يتطب الأمر معالجتها. حيث يواجه متخذ القرار في الواقع العلمي مشاكل غير نمطية، ولكي يمكن معالجتها، ينبغي إجراء بعض التحويرات في صيغة نموذج النقل التقليدية بما يستوعب تلك الظواهر والخصائص غير النمطية في المشكلة، ويرد في الواقع العملي مشاكل عديدة من هذا النوع إلا أن أهمها هو:

- مشكلة تقليل عمليات النقل الفارغ.
- مشكلة تقليل تكاليف النقل والإنتاج.
- تخطيط الإنتاج الإضافي وتسويقه.
- توزيع المواقع والمهام الإنتاجية.

وفيما يلي توضيح لكيفية معالجة هذه المشاكل من خلال صياغة النموذج الرياضي الملائم لمواصفات المشكلة غير الخطية.

1.1.5. نموذج تقليل عمليات النقل الفارغ

إن استغلال وسائل النقل وفق الأسلوب الأمثل هو من المشاكل المهمة التي تواجه متخذ القرار في المنظمة. إذ من المعروف أن هذه الوسائل تستقطب مبالغ لا يستهان بها من رأسمال المنظمة وذلك بهيئة شاحنات أو حاملات أو أية معدات أخرى. وعندما تعمل هذه الوسائل ضمن خطوط معينة لنقل بضاعة أو منتوج معين من عدد من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام، فإن من المفروض أن تكون وسائل النقل هذه مستغلة بكامل طاقتها التحميلية. وكلما تحقق الاستغلال الكامل للطاقة التحميلية لوسائل النقل المذكورة، كلما كان ذلك مؤشراً جيداً حول كفاءة استغلال الوسائل المذكورة وبالتالي هو دليل أيضاً على كفاءة خطة النقل الموضوعة من قبل إدارة المنظمة.

إن المعيار أو المؤشر الذي يؤخذ بعين الاعتبار لتقييم عمليات أو خطة النقل، هو درجة استغلال وسائل النقل المتوفرة. ومن المعايير المعروفة في هذا المجال، هو حجم عمليات النقل الفارغ مقارنة بعمليات النقل الكلية. حيث كلما كانت هناك عمليات نقل بحمولة فارغة ضمن عمليات النقل الكلية، كلما كان ذلك دليلاًعلى أن خطة النقل الموضوعة بعيدة عن مستوى الأمثلية المستهدفة من قبل إدارة منظمة الأعمال. لذلك فإن جهد متخذ القرار في هذه الحالة ينبغي أن ينصب على تقليل عمليات النقل الفارغ قدر الإمكان وذلك بغية رفع كفاءة

استغلال وسائل النقل المتاحة وتتضح هذه الفكرة من خلال المشكلات الموضحة أدناه.

مشكلة رقم (1): منظمة أعمال تجارية تملك شاحنات كبيرة تستخدمها لنقل البضائع بين عدد من المدن وهي $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ المسافة بين هذه المدن محسوبة بالكيلو مترات تتضح من خلال المصفوفة التالية:

$$C = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 20 & 40 & 35 & 60 & 50 \\ 20 & 0 & 30 & 60 & 80 & 45 \\ 40 & 30 & 0 & 70 & 55 & 25 \\ 35 & 60 & 70 & 0 & 48 & 72 \\ 60 & 80 & 55 & 48 & 0 & 15 \\ 50 & 45 & 25 & 72 & 15 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

إن عدد الشاحنات المطلوبة للعمل بين المدن الستة وبحمولة كاملة وذلك في الوقت المحدد لنقل الحمولات المطلوب هي كما في المصفوفة التالية:

$$C = \begin{array}{c} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \\ M_5 \\ M_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 6 & 8 & 5 & 7 \\ 5 & 4 & 0 & 3 & 9 & 0 \\ 4 & 8 & 3 & 0 & 5 & 4 \\ 9 & 0 & 5 & 6 & 0 & 1 \\ 8 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

المطلوب: وضع خطة لحركة الشاحنات بحيث تكون عدد الكيلو مترات المقطوعة بحمولة فارغة أقل ما يمكن مع توزيع البضاعة بالكميات المطلوبة.

الحل: إن حل هذه المشكلة يبدأ بوضع الافتراضات التالية:

نفرض أن m هو مجموعة من المدن M_i (حيث أن: $i = 1 , 2, ..., 6$) تؤلف مشكلة النقل المذكورة، ومن البيانات أعلاه يتضح أن:

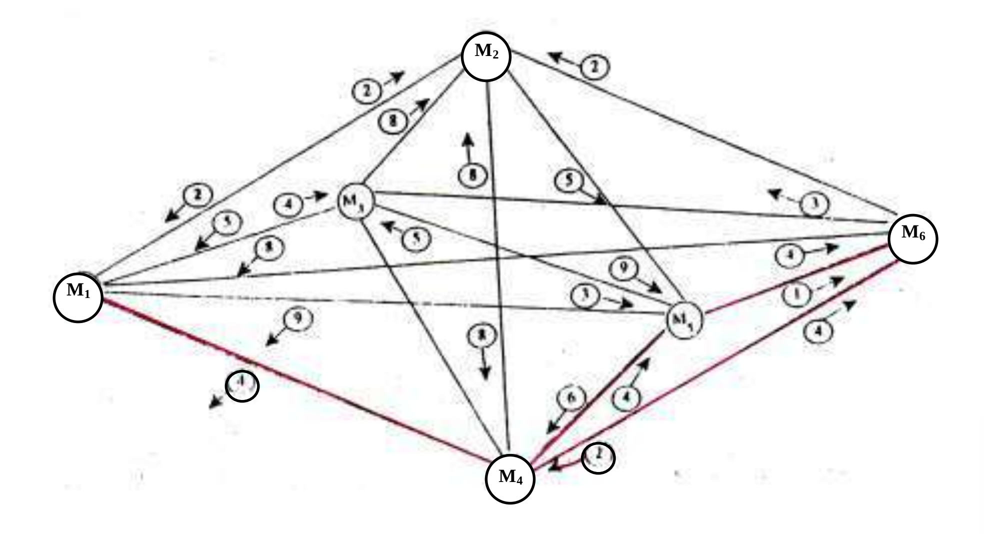
- مصفوفة المسافات هي $C = [C_{ij}]$

- مصفوفة عدد وسائط النقل $B = [B_{ij}]$

(حيث أن: $i , j = 1 , 2, ..., 6$)

إن الشكل الذي يوضح نظام النقل في ظل عدد معين b_{ij} من الشاحنات الناقلة للبضاعة والمتجه من المدينة M_i إلى المدينة M_j وذلك بحمولة كاملة هو كما يلي:

الشكل رقم (5–1) نظام النقل في عدد معين b_{ij} من الشاحنات المتحركة من المدينة M_i إلى المدينة M_j وذلك بحمولة كاملة ($O \leftarrow$ رمز لعدد الشاحنات)



- إن عدد الشاحنات المحلة بحمولـة كاملـة والمتحركـة إلى مدينـة معينـة لا يساوي عدد الشاحنات المحملة بحمولة كاملة والقادمة من المدينة نفسها.

- عـلى افـتراض أن y_j (حيـث أن: $j = 1 , 2 , ..., 6$) هـو عـدد الشـاحنات الخارجة والمحملة بحمولة كاملة، فإن:

$$y_j = b_{1j} + b_{2j} + b_{3j} + b_{4j} + b_{5j} + b_{6j}$$

مجموع عدد الشاحنات الخارجة

$$y_j = \sum_{i=1}^{6} b_{ij}$$

والمحملة بحمولة كاملة حيث أن: $j = 1 , 2 , ..., 6$

- عـلى افـتراض أن w_i (حيـث أن: $i = 1 , 2 , ..., 6$) هـو عـدد الشـاحنات الداخلة والمحملة بحمولة كاملة، فإن:

$$w_j = b_{i1} + b_{i2} + b_{i3} + b_{i4} + b_{i5} + b_{i6}$$

مجموع عدد الشاحنات الداخلة بمحمولة كاملة

$$w_j = \sum_{j=1}^{6} b_{ij}$$

حيث أن: $i = 1 , 2 , ..., 6$

على افتراض أن تنطلق إلى أي مدينة عدد معين من الشاحنات الخارجـة ذات الحمولة الكاملة يساوي نفس العدد من الشاحنات القادمة ذات الحمولة الكاملة أيضاً، فإن ذلك يعني أنه سوف لن يكون هناك حركة شاحنات بحمولـة فارغـة في ظل نظام النقل المذكور أعلاه.

- هناك مدن في النظـام الحـالي للمشـكلة المعـبر عنـه بالشـكل (5-1) تحقـق العلاقة التالية:

$$y_k > w_k$$

حيث أن: $k = 1 , 2, ..., m_k$

$m_k \leq 6$

وهو يعني أن هناك مدن معينة تخرج منها شاحنات فارغة، ويرمز لهذه المـدن بالرمز p، حيث أن:

$$P = [P_1 , P_2 , P_3 , ..., P_k]$$

حيث أن: $k \leq 6$

إن عدد الشاحنات الفارغة المتجهة من هذه المـدن وتحقـق العلاقـة $y_k > w_k$ تحسب كما يلي:

$$a_k = y_k - w_k$$

حيث أن : a_k ⟵ عدد الشاحنات الفارغة

- هناك مدن في النظام الحـالي للمشـكلة المعـبر عنهـا بالشـكل (5-1) تحقـق العلاقة التالية:

$$y_l < w_l$$

حيث أن: $l = 1 , 2, ...,m_l$

$$m_l \leq 6$$

وهو يعني أن هذه المدن تدخل إليها شـاحنات فارغـة أكثـر مـن الشـاحنات الخارجة منها ذات الحمولة الكاملة. ويرمز لهذه المدن بالرمز R، حيث أن:

$$R = [R_1 , R_2 , ..., R_l]$$

(حيث أن: $l \leq 6$)

- إن عدد الشاحنات الفارغة التي تتجه إلى هذه المدن وتحقق العلاقة $y_1 < w_1$ تحسب كما يلي:

$$b_l = w_l - y_l$$

- هناك مدن في النظام الحالي للمشكلة المعبر عنها بالشكل (1.5) تحقق العلاقة التالية:

$$y_n = w_n$$

$$\left(\text{حيث أن: } n = 1, 2, \ldots, m_n \quad m_n \leq 6 \right)$$

وهو يعني أن عدد الشاحنات الفارغة الداخلة إلى المدن هو نفس عدد الشاحنات المحملة الخارجة من المدن ذاتها.

- إن مجموعة المدن التي يدخل إليها عدد من الشاحنات الفارغة يساوي عدد الشاحنات المحملة الخارجة منها يرمز لها بالرمز α، حيث أن:

$$\alpha = [M_1, M_2, \ldots, M_n]$$

(حيث أن: $n \leq 6$)

مثل هذه المدن لا تطلب ولا ترسل شاحنات فارغة ويسمى هذا النوع من المدن بالمدن المحايدة[1]. وفي ظل النظام المعبر عنه بالشكل (5-1) يمكن تجاهل هذا النوع من المدن عند وضع خطة النقل التي من خصائصها أن تكون تكاليف النقل الفارغة أقل ما يمكن.

- في الفرضيات أعلاه تم اعتبار الرمز M ممثلاً لمجموعة المدن Mi (حيث أن: i = 1, 2, ..., 6) الداخلة في تأليف النظام المعبر عنه بالشكل (5-1) وهنا لا بد من الإشارة إلى أن الرمز m يمكن أن يقسم إلى ثلاثة مجاميع وكما يلي[2]:

([1]) H.KAYNSKI, ABADACH. Op. Cn., pp.213.

([2]) الرمز ∪ يعني اتحاد Union.

$$M = P \cup R \cup d \cup$$

-أن Xij هو عدد الشاحنات الفارغة المتحركة من المدينة Mi المنتمية إلى المجموعة p والمتوجهة إلى المدينة Mj المنتمية إلى المجموعة R.

إن حل هذه المشكلة وإيجاد الحل الأمثل لها الذي يتعلق بتقليل حركة عدد الشاحنات الفارغة يتطلب تحوير مكوناتها ووضعها بصيغة مشكلة نقل مغلق كلاسيكية. إن نموذج النقل الكلاسيكي الذي يعبر عن هذه المشكلة هو:

المطلوب تحديد قيمة المتغير X حيث أن:

$$X = [X_{ij}] (i = 1 , 2 , ..., m_k)$$

الذي يحقق الشروط التالية:

$$\sum_{j=1}^{m_l} X_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, ..., m_k)$$

$$\sum_{i=1}^{m_k} X_{ij} = b_j \qquad (j = 1, 2, ..., m_L)$$

وتجعل من دالة الهدف التالية أقل ما يمكن.

$$Z = \sum_{i=1}^{m_k} \sum_{j=1}^{m_l} C_{ij} . X_{ij}$$

في ظل النموذج الرياضي أعلاه والخاص بالمشكلة قيد الدرس يتحقق الشرط التالي:

$$\sum_{i=1}^{m_k} a_j = \sum_{j=1}^{m_L} b_j$$

وهذا مما يثبت أن المشكلة داخلة ضمن نطاق النقل المغلق.

تأسيساً على ما تقدم فإن، لأي مدينة في النظام الموضح بالشكل (5-1) لـدينا العلاقات الرياضية التالية:

$$y_j = \sum_{i=1}^{6} b_{ij} \quad (j = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$w_i = \sum_{i=1}^{6} b_{ij} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$y_j - w_i \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

إن عرض بيانات المشكلة بشكل متكامـل تمهيـداً لحلهـا يتضـح مـن خـلال الجدول (5-1) وفي هذا الجدول نجد أن:

1- المدن M_1 , M_5 , M_6 هي من المدن المصدرة (التي تخرج منها) الشاحنات وذلك بالإعداد $a_1 = 12$, a_5 , $= 1$, $a_6 = 2$.

2- المدن M2 , M4 هي من المدن المستوردة (التي تـدخل إليهـا) الشـاحنات وذلك بالأعداد $b_2 = 13$, $b_4 = 2$.

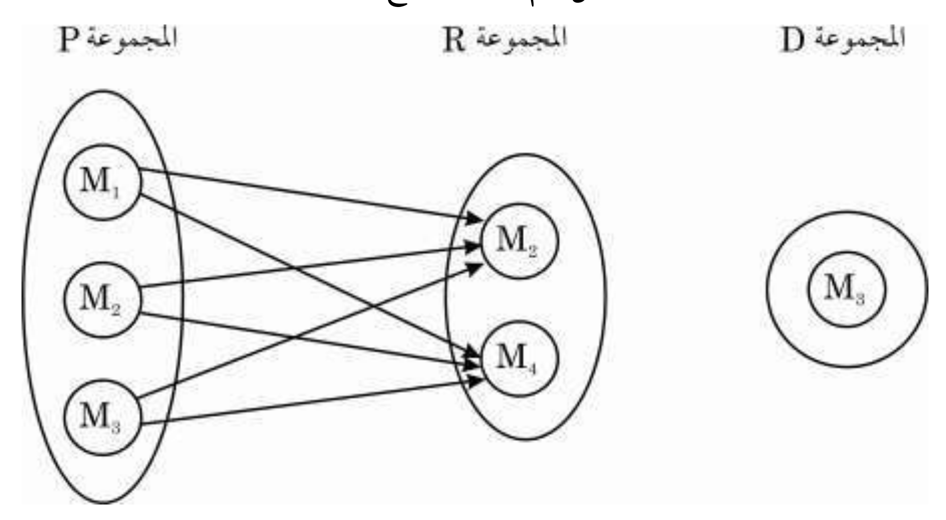
3- المدن M_3 هي مدينة اعتيادية.

إن الشكل (5-2) يدعم نتائج المشكلة الواردة في الجدول (5-1).

جدول رقم (5-1) بيانات المشكلة

العدد المخطط من الشحانات الداخلة إلى المدينةMi								$w_i = \sum_{i=1}^{6} b_i$	Yi – Wi	a_i	b_i
		M1	M2	M3	M4	M5	M6				
العدد المخطط من الشحانات الداخلة إلى المدينةMi	M1	0	2	4	3	3	4	16	28-16	12	-
	M2	2	0	6	8	5	7	28	15-28	-	13
	M3	5	4	0	3	9	0	21	21-21	-	-
	M4	4	8	3	0	5	4	24	22-24	-	2
	M5	9	0	5	6	0	1	21	22-21	1	-
	M6	8	1	3	2	0	0	14	16-14	2	-
$y_i = \sum_{i=1}^{6} b_{ij}$		28	15	21	22	22	16	$\sum_{i=1}^{6} b_{ij} = 124$	$\sum_{i=1}^{6} y_i = w_i = 0$	$\sum a_k = 15$	$\sum b_i = 15$

الشكل رقم (5-2) مجاميع المشكلة



الخطوة التالية هي تنظيم جدول النقل بالاعتماد على المصفوفات الواردة في منطوق المشكلة وذلك كما يلي:

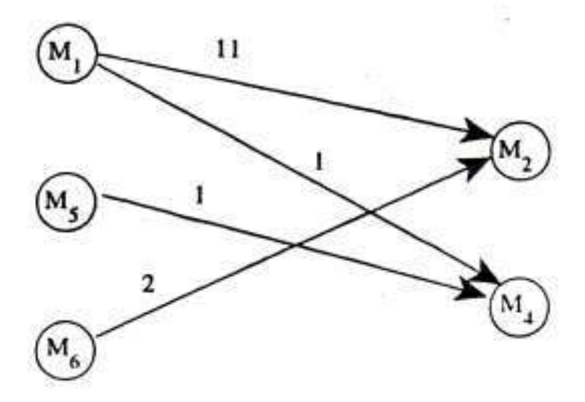
المدن التي تتجه إليها الشاحنات / المدن التي تخرج منها الشاحنات	M_2	M_4	a_i
M_1	20	35	12
M_5	80	48	1
M_6	45	72	2
b_j	13	2	15 \ 15

يمكن حل المشكلة المعروضة من خلال الجدول (5-2) باستخدام أحد طرق إيجاد الحل المشار إليها في الفصل السابق، وعندها نحصل على الحل الأمثل التالي:

$$X = \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

وعلى أساس ما تقدم فإن أقل مقدار ممكن من المسافة المقطوعة بالكيلو مترات من قبل الشاحنات وبحمولة فارغة تتضح من خلال الشكل (5-3) التالي:

الشكل رقم (5-3) مسارات النقل التي توضح خطة النقل المثلى



2.1.5. نموذج تقليل تكاليف نقل والإنتاج

تعمل بعض منظمات الأعمال الإنتاجية في مجال تهيئة وإنتاج المواد الأولية أو في استخراج المواد الأولية من مصادرها الطبيعية، كما هو الحال في المنظمات الإنتاجية المتخصصة في استخراج الفحم الحجري أو الرخام والحجر الطبيعي وما شابه ذلك.

إن مؤشر الاستغلال الأمثل لوسائل النقل في هذه المنظمات لا يخضع لاعتبار عامل كلفة عمليات النقل فحسب، بل إن هناك عامل آخر يتحكم في هذا المؤشر، ألا وهو تكاليف الإنتاج أو تكاليف استغلال مصدر المادة الأولية (منجم فحم، حقل بترول، مقلع...الخ). حيث في بعض الأحيان يفضل متخذ القرار اعتماد خطة نقل للمواد الأولية باستخدام سيارات حمل معينة بتكاليف عالية مقابل اعتبار آخر، وهو أن تكاليف إنتاج المادة الأولية منخفضة بالمستوى الذي يبرر قبول خطة النقل المذكورة. وقد يكن الأمر معكوساً، إذ أن تكاليف الإنتاج العالية قد تحول دون الأخذ بخطة نقل منخفضة التكاليف.

بشكل عام أن الخطة المثلى التي يتم اعتمادها من قبل المنظمة في هذه الحالة، هي تلك الخطة التي تضمن لها تحقيق أقل ما يمكن من تكاليف النقل والإنتاج معاً.

المشكلة الموضحة تفاصيلها أدناه تعرض فكرة تقليل تكاليف النقل والإنتاج المشتركة إلى أقل ما يمكن.

المشكلة رقم (1): ثلاث منظمات أعمال صناعية A_1 , A_2 , A_3 تقوم بإنتاج بضاعة نصف مصنعة. وهذه البضاعة هي بمثابة المادة الأولية الأساسية اللازمة للإنتاج في أربعة منظمات أخرى وهي B_5 , B_4 , B_3 , B_2 , B_1.

إن تكاليف إنتاج الوحدة الواحدة من البضاعة نصف المصنعة في منظمات الأعمال الثلاث هي كما يلي:

المنظمة $A_1 \leftarrow 3$ وحدة نقدية.

المنظمة $A_2 \leftarrow 5$ وحدة نقدية.

المنظمة $A_3 \leftarrow 2$ وحدة نقدية.

إن تكاليف نقل وحدة واحدة من البضاعة نصف المصنعة من المنظمة A_i (حيث أن: $i = 1 , 2, 3$) إلى المنظمة B_j (حيث أن: $j = 1 , 2, 3, 4, 5$) تتضح من خلال المصفوفة التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 6 & 4 & 8 \\ 8 & 4 & 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

الطاقة الإنتاجية من البضاعة نصف المصنعة بالنسبة لكل منظمة تحسب كالآتي:

المنظمة $A_1 \leftarrow 120$ طن.

المنظمة $A_2 \leftarrow 100$ طن.

المنظمة $A_3 \leftarrow 80$ طن.

الطلب على البضاعة نصف المصنعة من قبل المنظمات الأخرى هي كما يلي:

$B_1 = 40$ طن ، $B_2 = 60$ طن ، $B_3 = 20$ طن ، $B_4 = 50$ طن، $B_5 = 40$ طن

المطلوب: وضع خطة لإنتاج البضاعة نصف المصنعة في المنظمات A_1, A_2, A_3 مع وضع خطة لتجهيز البضاعة المذكورة إلى المنظمات B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 بحيث تكون التكاليف الكلية للإنتاج والنقل أقل ما يمكن.

الحل: لحل هذه المشكلة ينبغي وضع الفرضيات التالية:

a_i (حيث أن: $i = 1, 2, 3$) الطاقة الإنتاجية للبضاعة نصف المصنعة في المنظمة A_i.

b_j (حيث أن: $j = 1, 2, 3$) الطلب على البضاعة نصف المصنعة في المنظمة B_j.

h_i (حيث أن: $i = 1, 2, 3$) تكاليف إنتاج وحدة واحدة من البضاعة نصف المصنعة في المنظمة A_i.

إن مجموع الطاقة الإنتاجية للمنظمات الثلاث A_1, A_2, A_3 تحسب كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 120 + 100 + 80 = 300 \text{ طن}$$

مجموع الطلب على البضاعة نصف المصنعة من قبل المنظمات تحسب كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{5} b_j = 40 + 60 + 20 + 50 + 40 = 210 \text{ طن}$$

أي أن:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i > \sum_{j=1}^{5} b_j$$

وبذلك فإن المشكلة تعتبر من مشاكل النقل المفتوح.

على افتراض أن المصفوفة Cij ‎(i = 1 , 2, 3 , j = 1 , 2 , 3 , 4 , 5)‎ هي ذات المصفوفة C والتي تعبر عن التكاليف المتحققة عند نقل وحدة واحدة من البضاعة من المنظمة (i) المنتجة لها إلى المنظمة (j) المستهلكة لها،عليه فإن:

‎$K_{ij} = C_{ij} + h_i$ (حيث أن : $6 = 1, 2 , 3, j = 1 , 2 , 3, 4, 5$)‎

إن المتغير K_{ij} يعني مجموع تكاليف الإنتاج والنقل لوحدة واحدة من البضاعة من المنظمة (i) إلى المنظمة (j)، ويمكن أن يعبر عن هذا المتغير بالرمز k، حيث أن:

‎$K = [K_{ij}]$ (حيث أن : $i = 1, 2 , 3, j = 1 , 2 , 3, 4, 5$)‎

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \end{bmatrix}$$

وبالتعويض نحصل على ما يلي:

$$K = \begin{bmatrix} C_{11}+h_1 & C_{12}+h_1 & C_{13}+h_1 & C_{14}+h_1 & C_{15}+h_1 \\ C_{21}+h_2 & C_{22}+h_2 & C_{23}+h_2 & C_{24}+h_2 & C_{25}+h_2 \\ C_{31}+h_3 & C_{32}+h_3 & C_{33}+h_3 & C_{34}+h_3 & C_{35}+h_3 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 6 & 8 & 4 \\ 8 & 6 & 11 & 9 & 13 \\ 10 & 6 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

لغرض حل هذه المشكلة يتطلب الأمر تحوير مفرداتها مما يـؤدي إلى تحويلهـا من مشكلة نقل مفتوح غير نمطية إلى مشكلة نقل مغلق تقليدية. إن ذلك يحصل بعد أن يتم افتراض مركز استلام وهمي (منظمة أو مؤسسة افتراضـية مسـتهلكة للبضاعة) من خلال الرمز B_6 وذلك كما يلي:

$$b_6 = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum b_j = 90$$

إن حل هذه المشكلة يكون من خلال تحديد قيمة للمتغير X، علماً بأن:

$X = [X_{ij}]$

حيث أن:

X_{ij} $(i = 1 , 2, 3 , j = 1 , 2, 3, 4, 5, 6)$ ← مقدار أو كمية البضاعة نصف المصنعة (أو نصف الجاهزة) المطلوب نقلها من المنظمة (i) إلى المنظمة (j).

إن عناصر المصفوفة X ينبغي أن تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} = a_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = b_J \qquad (j = 1, 2, 3, 5, 6)$$

وتجعل دالة الهدف التالية أقل ما يمكن:

$$Z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{6}m_{ij}\,.\,X_{ij}\longrightarrow Min$$

يتم تحوير مصفوفة التكاليف الحالية وذلك لاستيعاب تكاليف المنظمة الافتراضية b_6 ولو كان المتغير M هو الرمز الجديد لمصفوفة الكلفة المحورة وذلك كما يلي:

(حيث أن: $M = [M_{ij}]$ (i = 1 , 3, 4, j = 1 , 2 , 3 , 4, 5, 6

$$M=\begin{bmatrix}7 & 5 & 6 & 8 & 4 & 0\\ 8 & 6 & 11 & 9 & 13 & 0\\ 7 & 5 & 6 & 8 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

المعلومات في المصفوفة M يتم إفراغها في الجدول التالي:

جدول رقم (5-3) بيانات المشكلة

مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	العرض a_i
A_1	7	5	6	8	4	0	120
A_2	8	6	11	9	13	0	100
A_3	10	6	5	9	4	0	80
الطلب b_j	40	60	20	50	40	90	300

طبقاً للمخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-3) ومنطوق النظرية العامة الواردة في الفصل السابق، يجري تحوير المصفوفة M وذلك كما يلي:

$$M\rightarrow \overset{\circ}{M}\rightarrow \overset{1}{M}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

وطبقاً للقاعدة الخاصة بالنقل حسب طريقة العنصر الأقل كلفة، فإن مجموع تكاليف النقل سوف تكون أقل ما يمكن فيما لو تمت كافة عمليات النقل للكميات X_{ij} (حيث أن: $X_{ij} > 0$) طبقاً للعناصر الصفرية الموجودة في المصفوفة $\overset{1}{M}$.

الخطوة التالية هي تنفيذ عملية النقل باستخدام القواعد الواردة في المخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-4) وكذلك الشكل (4-5) من الفصل السابق مع الاستناد إلى العناصر الصفرية الواردة في المصفوفة $\overset{1}{M}$ كأساس في تنفيذ عملية النقل، وعندها نحصل على الجداول التالية[1]:

1- بموجب المخطط الانسيابي الوارد في الشكل رقم (4-4) نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (5-4)

مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	العرض a_i	
A_1	0 40	0 60	[illegible]	0 20	0	[illegible]	0	
A_2	1	1	1	1	9	0 190	10	*
A_3	3	1	0 20	1	9 40	0	20	*
b_j	6	0	0	30	0	10	30 / 30	
			*		*	*		

[1] انظر الفصل الرابع.

2- بموجب المخطط الانسيابي الوارد في الشكل (4-5) نحصل على الجدول التالي:

جدول رقم (4-5)

مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	العرض a_i
A_1	0 40	0 60	2	0 20	1	1	0
A_2	0	0	6	0 (+ 10) ⊕	9	6	10 ⊖
A_3	2	0	0	0 (+20) ⊕	0 40	0	20 ⊖
b_j الطلب	0	0	0	⊖ (-10)30 (-20)	0	0	30 30

إن حصيلة المتغيرات في الجدول (5-5) يمكن إجمالها من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (5-6)

مراكز الاستلام / مراكز التوزيع	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	العرض a_i
A_1	0 40	0 60	2	0 20	1	1	0
A_2	0	0	6	0 10	9	0 90	0
A_3	2	0	0 20	0 20	0 40	0	0
b_j الطلب	0	0	0	0	0	0	0 0

من الجدول أعلاه يمكن أن نستنتج خطة النقل التالية[1]:

$$X = \begin{bmatrix} 40 & 60 & 0 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 90 \\ 0 & 0 & 20 & 20 & 40 & 0 \end{bmatrix}$$

إن دالة الهدف في ظل خطة النقل أعلاه ومصفوفة التكاليف M هي كالآتي:

$$Z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{6} m_{ij} . X_{ij} \longrightarrow Min$$

$$Z = 7 X 40 + 5 X 60 + 8 X 20 + 9 X 10 + 0 X 90 + 5 X 20 + 9 X 20 + 4 X 40$$

$$Z = 1270$$

التكاليف الكلية للنقل والإنتاج

ويتم توزيع خطة الإنتاج على المنظمات الثلاث A_1 , A_2 , A_3 كما يلي:

$$A_1 \longrightarrow \sum_{j=1}^{5} X_{ij} = 40 + 60 + 0 + 20 + 0 = 120$$ وحـــدة

$$A_2 \longrightarrow \sum_{j=1}^{5} X_{2j} = 0 + 0 + 0 + 10 + 0 = 10$$ وحـــدة

$$A_3 \longrightarrow \sum_{j=1}^{5} X_{3j} = 0 + 0 + 20 + 20 + 40 = 80$$ وحـــدة

وطبقاً لهذه الخطة فإن المنظمة A_2 سوف توفر 90 وحـدة مـن طاقتهـا المتاحـة بينما تستغل المنظمة A_3, A_1 كامل طاقتها الإنتاجية.

---

[1] إن الأرقام الموجودة في العمود الأخير مـن المصـفوفة X تعنـي الطاقـة غـير المستغلة المـنظمات الثلاث A1 , A2 , A3.

3.1.5 نموذج تخطيط الإنتاج الإضافي وتوزيعه:

في الواقع العملي تتمكن بعض منظمات الأعمال من تنفيذ خطة الإنتاج بالكامل مع تحقيق زيادة معينة في نوعية وكمية الإنتاج قياساً بما هو مخطط، وغالباً ما يكون ذلك استجابة لمعطيات السوق المحلية أو الخارجية الذي تتعامل معه المنظمة، حيث أن زيادة الطلب على البضاعة المنتجة من قبل المستهلكين يشجع إدارة المنظمة على إجراء تعديلات إيجابية في الخطة باتجاه زيادة الإنتاج. في هذا النوع من المشاكل تبرز مشكلة البحث عن الحل الأمثل لإيجاد الحجم الأمثل للإنتاج الإضافي الذي يغطي الحاجة الإضافية للمستهلك (مراكز الاستلام) مع تحديد الصيغة المثلى في تغطية الحاجة الإضافية للمستهلك (مراكز الاستلام) وتسويق الإنتاج المذكور. وهنا يتطلب الأمر تخطيط الزيادة الإضافية في الإنتاج وتخطيط عملية توزيعه إلى مختلف مراكز الاستلام المستهلكة لهذا الإنتاج. ويتم التخطيط في الحالة الأولى والثانية في إطار فرضية مفادها أن عدد المنظمات المنتجة والموزعة للإنتاج المذكور، موقعها الجغرافي وكذلك العدد الكلي لمراكز الاستلام لا يتغير ضمن السقف الزمني للخطة الموضوعة. في المثال أدناه عرض ولكيفية تخطيط الإنتاج الإضافي وتسويقه إلى مراكز الاستلام، وذلك لإحدى المشكلات المستمدة من الواقع العملي التي توضح هذه الفكرة:

المشكلة رقم (1): في إقليم جغرافي معين تم تثبيت أربعة مواقع إنتاجية للمنظمة A وهي A_1 , A_2 , A_3 , A_4 وذلك لإنتاج منتوج معين. المواقع الإنتاجية هذه تقوم بتوزيع منتوجاتها إلى عدد من مراكز الاستلام في الإقليم المذكور وهي

B_1 , B_2 , B_3 ,B_4 , B_5، إن حجم الإنتاج في الفترة الحالية في المواقع الإنتاجية للمنظمة قيد الدرس هي كما يلي:

$$A4 = 43 , A_3 = 17 \quad , \quad A2 = 20 , A_1 = 30$$

تتوقع إدارة المنظمة A أن يكون الطلب على منتجاتها في الفترة القادمة كالآتي:

$$B_6 = 40 , B_5 = 13 , B_4 = 22 , B_3 = 15 , B_2 = 30 , B_1 = 20$$

إن الإنتاج الإضافي في المواقع الإنتاجية للمنظمة A (الإنتاج اللازم لسد النقص المتوقع في حاجة مراكز الاستلام) ينبغي أن لا يزيد عن المستويات التالية:

$$A_8 = 7 , A_7 = 13 , A_6 = 20 , A_5 = 10$$

تكاليف نقل الوحدة الواحدة من مواقع المنظمة Ai (حيث أن: $i = 1, 2, 3, 4$) إلى مراكز الاستلام B_j (حيث أن $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) هي كما في المصفوفة التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 130 & 150 & 170 & 20 & 120 & 70 \\ 130 & 80 & 10 & 110 & 30 & 120 \\ 90 & 40 & 10 & 50 & 60 & 180 \\ 80 & 100 & 100 & 60 & 150 & 60 \end{bmatrix}$$

طلبت المنظمة A من إدارة التسويق والنقل وبالتعاون مع إدارة الإنتاج دراسة هذه المشكلة لوضع خطة الإنتاج الإضافي للمواقع الإنتاجية للمنظمة A وذلك للفترة اللاحقة مع الأخذ ينظر الاعتبار مسألة تقليل التكاليف الكلية للنقل إلى أقل ما يمكن.

الحل: لحل المشكلة هذه تم وضع الفرضيات التالية:

a_i $(i = 1 , 2 , 3 , 4)$: حجم الإنتاج للمواقع الإنتاجية التابعة للمنظمة المذكورة وذلك في الفترة الحالية.

b_j $(j = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6)$: مقدار الحاجة لإنتاج المنظمة المحدد من قبل المنظمة B_j في الفترة الحالية.

a_i $(i = 1 , 2 , 3 , 4)$ حجم الإنتاج للمواقع الإنتاجية التابعة للمنظمة A وللفترة اللاحقة.

b_j $(j = 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6)$: حجم الإنتاج المطلوب من قبل مراكز الاستلام B_j في الفترة اللاحقة.

من المعلومات أعلاه يمكن أن نستنتج أن الإنتاج الإضافي للمنظمة A يحسب كالآتي:

$$\alpha\ a_i = a'_i - a_i$$

إن المقدار $\alpha\, a_i$ ينبغي أن لا يتعدى حدود معينة، أي $\Delta\, a_i$

إن الحدود المقبولة للإنتاج يتم تحديدها مسبقاً لكل موقع إنتاجي، وذلك كما يلي:

$\Delta a_1 = 10$ وحدة

$\Delta a_2 = 20$ وحدة

$\Delta a_3 = 13$ وحدة

$\Delta a_4 = 17$ وحدة

إن مجموع الطاقة الإنتاجية للمواقع الإنتاجية التابعة للمنظمـة B_O في الفـترة اللاحقة هي أكبر من مجموع الطلب المحدد من قبل مراكز الاستلام B_j ، أي أن:

$$\sum_{i=1}^{4} (a_i + \Delta a_i) = (30+10)+(20+20)+(7+13)+(43+17) = 160$$

$$\sum_{j=1}^{6} b_j = 20+30+15+22+13+40 = 140$$

أي أن:

$$\sum_{i=1}^{4} (a_i + \Delta a_i) > \sum_{j=1}^{6} b_j$$

وهذا يعني أن المشكلة قيد الدرس هي من مشاكل النقل المفتوح.

إذا كان من منطوق المشكلة واضح أن:

C_{ij} (حيـث أن: $i = 1, 2, 3, 4, \; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) هـي عنـاصر المصفوفة C المتعلقة بتكاليف النقل.

X_{ij} (حيـث أن: $i = 1, 2, 3, 4, \; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) هـي عنـاصر المصفوفة X المتعلقة بخطة النقل.

فإن المطلوب هو تحديد مقدار الإنتاج الإضـافي، الـذي مقـداره يتحـدد مـن العلاقة التالية:

$$\alpha \, a_i = a'_i - a_i$$

الذي يجعل من قيمة دالة الهدف التالية أقل ما يمكن:

$$Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{6} C_{ij} \cdot X_{ij} \longrightarrow Min$$

عند الشروع بحل المشكلة قيد الدرس يتطلب الأمر وضع الفرضيات التالية:

- إن الإيعاز للموقع الإنتاجي A_i للبدء بطرح الإنتاج الإضافي بمقدار αa_i ينبغي أن يكون من حيث المعنى والمضمون كما لو أن هنالك موقع إنتاجي جديد A_k.

(حيث أن $K = 4 + i$) قد إنشئ في نفس الإقليم الموجودة فيه مواقع الإنتاج الأخرى A_i. وعليه إذا كان لدينا للفترة السابقة 4 مواقع إنتاجية، فإن للفترة اللاحقة سوف يكون لدينا 8 مواقع إنتاجية (X 2 = 84).

- على افتراض أن للمواقع الإنتاجية الجديدة، ما يلي:

(حيث أن: $C_{kj} = C_{ij}$ $(i = 1 , 2, 3 , 4 , j = 1 , 2, 3 , 4, 5 , 6 , k = 4 + i$

إن المشكلة الحالية يمكن تحويرها إلى حالة في صيغ النقل المغلق وذلك كما يلي[1]:

جدول رقم (5-8)

		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_6	
مواقع انتاجية حقيقية موجودة اصلاً	A_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	∞	a_1
	A_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	∞	a_2
	A_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}	∞	a_3
	A_4	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}	C_{45}	C_{46}	α	a_4
مواقع انتاجية افتراضية جديدة	A_5	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}	0	Δ_{a1}
	A_6	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}	0	Δ_{a2}
	A_7	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}	C_{35}	C_{36}	0	Δ_{a3}
	A_8	C_{41}	C_{42}	C_{43}	C_{44}	C_{45}	C_{46}	0	Δ_{a4}
	$b'_j \rightarrow$	b'_1	b'_2	b'_3	b'_4	b'_5	b'_6	$'b_0$	

---

(1) H.KAYNSKI, ABADACH. Op. Cit., pp.226.

من الجدول السابق يتضح أن هناك مراكز استلام افتراضية B_o، يـتم حسـاب مقدار الطلب عندها للفترة اللاحقة كالآتي:

$$b_o = \sum_{i=1}^{4} (a_i + \Delta a_i) - \sum_{j=1}^{6} b_j$$

إن التجهيز إلى مراكز الاستلام الجديدة (الافتراضية) يمكن أن يتم فقط مـن كميات الإنتاج الإضافية، ولهذا السـبب كانـت هنـاك مسـارات غـير ممكنـة في الصفوف الخاصة بالمواقع الإنتاجية الحقيقية الموجودة أصلاً.

جدول رقم (8.5)

☒	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_0	☒	
A_1	130	150	170	20 22	120	70 8	∞	30	
A_2	130	80	10 15	110	30 5	120	∞	20	a
A_3	90	40 17	110	50	60	180	∞	17	
A_4	80 13	100	100	60	150	60 30	∞	43	
A_5	130	150	170	20	120	70 2	0 8	10	
A_6	130	80	10	110	30 8	120	0 12	20	
A_7	90	40 13	110	50	60	180	0	13	Δ_a
A_8	80 7	100	100	60	150	60	0	7	
b_j	20	30	15	22	13	40	20	160	

من الجدول أعلاه يتضح أن الإنتاج الإضافي للمواقع الإنتاج الجديدة هو كما يلي:

وحدة 2 $= \alpha a_1 \Rightarrow$ الموقع A_5

وحدة 8 $= \alpha a_2 \Rightarrow$ الموقع A_6

وحدة 13$= \alpha a_3 \Rightarrow$ الموقع A_7

وحدة 7 $= \alpha a_4 \Rightarrow$ الموقع A_8

كذلك أن مجموع الإنتاج في الفترة اللاحقة يجب أن يكون كالآتي:

وحـدة $32 = 2 + 30 = a_1 + \alpha_{a_1} \longrightarrow$ الموقع A_1

وحـدة $28 = 8 + 20 = a_2 + \alpha_{a_2} \longrightarrow$ الموقع A_2

وحـدة $30 = 13 + 17 = a_3 + \alpha_{a_3} \longrightarrow$ الموقع A_3

وحـدة $50 = 7 + 43 = a_4 + \alpha_{a_4} \longrightarrow$ الموقع A_4

إن الخطة المثلى للنقل في الفترة اللاحقة يمكن عرضها مـن خـلال المصـفوفة التالية:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 30 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \end{bmatrix}$$

إن أقل تكاليف نقل ممكنة للمشكلة الحالية يحسـب مـن خـلال معادلـة دالـة الهدف التالية:

$$Z = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{6} C_{ij} . X_{ij} \longrightarrow Min$$

$Z = 20 X 22 + 70 X 10 + 10 X 15 + 30 X 13 + 40 X 30 + 80 X20 + 60 X 30 = 6280$ وحدة نقدية

4.1.5. نموذج توزيع المواقع والمهام الإنتاجية

من إحدى مستلزمات زيادة الإنتاج كماً ونوعاً هو أن يتم توزيع المواقع الإنتاجية في مناطق جغرافية جيدة وتحديد مهمة الإنتاج لكل موقع منها. ويتطلب ذلك صياغة نموذج رياضي لاتخاذ القرار الأمثل في توزيع المواقع والخطط الإنتاجية بشكل كفوء. ويدخل هذا النموذج في إطار النماذج الرياضية لمشاكل النقل على اعتبار أن ذلك يرتبط بشكل وثيق بمشكلة نقل المنتجات من المواقع الإنتاجية إلى مراكز الاستلام التي هي بحاجة إليها. إن أهم النماذج الرياضية التي تعالج هذا النوع من المشاكل، هي ما يلي:

أولاً: النموذج الرياضي متعدد المراحل لاتخاذ القرار الأمثل في توزيع المواقع والمهام الإنتاجية:

في حالات كثيرة لا يؤخذ بعين الاعتبار عند وضع خطة النقل، تكاليف نقل المواد من مراكز التوزيع إلى مراكز الاستلام فحسب، بل يؤخذ أيضاً تكاليف نقل المواد المذكورة إلى المواقع الإنتاجية الجديدة التي تحتاجها كمادة أولية أساسية للإنتاج. ومن مخازن المواقع الإنتاجية هذه تجري عملية إعادة توزيع هذه المواد كمنتجات جاهزة وذلك إلى مراكز استلام معينة. وعلى أساس ذلك عند صياغة النموذج الرياضي اللازم لاتخاذ القرار في توزيع الإنتاج بشكل كفؤ ينبغي أن يؤخذ بنظر الاعتبار ليس فقط المواقع الإنتاجية التي تستلم البضاعة بل أيضاً المخازن الموجودة في هذه المواقع التي منها يتم نقل المواد كبضاعة جاهزة إلى مراكز استلام أخرى. لذلك فإن هذه الحالة تتفق من حيث المضمون مع ما ورد

سابقاً من مشاكل النقل متعدد المراحل. لتوضيح الصيغة الرياضية لهذا النوع من المشاكل يتطلب الأمر الاعتماد على المشكلة الافتراضية التالية:

هنالك خطة لنقل مواد أولية متشابهة من P من الأقاليم الجغرافية المختلفة إلى M من المواقع الإنتاجية المشيدة حديثاً[1]. في هذه المواقع تتم عملية تصنيع لهذه المواد وخزنها بهيئة منتجات جاهزة في المخازن العائدة لها. بعد ذلك تجري عملية نقل هذه المنتجات إلى مراكز الاستلام المحددة مسبقاً. إن كمية المواد الأولية المتجمعة خلال السنة في الإقليم الجغرافي P (حيث أن $P = 1 , 2, ... , P$) تقدير بحوالي Q_P وحدة.

إن مجموع كمية المنتجات المنقول من M موقع إنتاجي وذلك إلى N مركز استلام (والذي هو يساوي تماماً لمقدار حاجة مراكز الاستلام من المنتجات المذكورة) يبلغ b_n وحدة، حيث أن: $n = 1 , 2 .... , N$.

مجموع الإنفاقات الاستثمارية المحسوبة على الوحدة الواحدة من المنتوج الذي تم تصنعية في الموقع الإنتاجي m تبلغ S_m (حيث أن: $m = 1 , 2 , ... , M$) وحدة نقدية.

تكاليف صنع الوحدة الواحدة من المنتوج (بغض النظر عن كلفة المواد الأولية) في الموقع الإنتاجي m تقدر بحوالي g_m وحدة نقدية. أما تكاليف نقل البضاعة المنتجة من الموقع الإنتاجي m إلى مركز الاستلام n يبلغ C_{mn} وحدة نقدية.

---

(1) يقصد بالموقع الإنتاجية منظمة أعمال إنتاجية أو مصنع أو شركة وما إلى ذلك.

كلفة الوحدة الواحدة من المادة الأولية المنقولة من الأقاليم الجغرافي P، مضافاً إليها كلفة النقل إلى m موقع إنتاجي تبلغ K_{mp}.

مقدار ما يتم استهلاكه من المواد الأولية لإنتاج الوحدة الواحدة من المنتوج في الموقع الإنتاجي m يقدر بحوالي λ_m وحدة من المواد الأولية.

في ضوء ما تقدم يكون المطلوب هو صياغة النموذج الرياضي لاتخاذ القرار الأمثل في توزيع المواقع والمهام الإنتاجية واعتماد مؤشر للأمثلية وهو بلوغ أقل كلفة كلية ممكنة للإنفاق الاستثماري المتحقق.

الحل: لصياغة النموذج الرياضي للمشكلة، يتطلب الأمر وضع التعاريف التالية:

X_m $(m = 1 , 2, \ldots, M)$ حجم الإنتاج في الموقع الإنتاجي m.

X_{mn} $(m = 1 , 2, \ldots, M , n = 1 , 2, \ldots, N)$ حجم الإنتاج المنقول من m موقع إنتاجي إلى n موقع إنتاجي.

المتغيرات الأساسية X_m , X_{mn} , y_{mp} ينبغي أن تكون قيم موجبة، أي أن:

$$X_m \geq 0 , X_{mn} \geq 0 , y_{mp} \geq 0$$

إن المجموع السنوي لكمية المواد الأولية التي يجري نقلها من P إقليم جغرافي إلى كافة المواقع الإنتاجية تحسب كما يلي:

$$\sum_{m=1}^{M} y_{mp}$$

مقدار ما يتوفر من المـواد الأوليـة خـلال السـنة في الإقلـيم الجغـرافي P هـو بكميات محدودة ويبلغ Qp ، وينبغي أن يحقق الشرط التالي:

$$\sum_{m=1}^{M} y_{mp} \leq Q_p \qquad (p=1\,,\,2,...,P)$$

حجـم الإنتـاج المتحقـق في الموقـع الإنتـاجي m، ينبغـي أن يسـاوي حجـم البضاعة المرسلة من قبل الموقع المذكور إلى كافة مراكز الاسـتلام، أي ينبغـي أن يتحقق الشرط التالي:

$$\sum_{n=1}^{N} X_{mn} = X_m \qquad (m=1\,,\,2,...,M)$$

حجم المواد الأولية التي يتم إرسالها إلى الموقع الإنتاجي m ينبغـي أن يحسـب كما يلي:

$$\sum_{P=1}^{P} y_{mp}$$

وينبغي أن يتساوي مع مقدار الاستهلاك، وعليه يكون لدينا

$$\sum_{P=1}^{P} y_{mp} = \lambda_m X_m \qquad (m=1\,,\,2,...,M)$$

إن مقدار الحاجة في موقع الاستلام n ، ينبغـي أن يسـاوي مقـدار البضـاعة المرسلة إلى الموقع المذكور أي أن:

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mn} = b_m \qquad (n=1\,,\,2,...,N)$$

مقدار الإنفاق الاستثماري الكلي على الإنتاج في كافة المواقع الإنتاجية، يبلغ:

$$K_1 = \sum_{m=1}^{M} S_m \ X_m$$

تكاليف إرسال المواد الأولية إلى كافة المواقع الإنتاجية تبلغ:

$$K_2 = \sum_{m=1}^{M} \ \sum_{P=1}^{P} K_{mp} \ y_{mp}$$

مجموع تكاليف الإنتاج والنقل إلى مراكز الاستلام يبلغ:

$$K_3 = \sum_{m=1}^{M} \ \sum_{n=1}^{N} C_{mn} \ X_{mn}$$

واستناداً إلى ما تقدم، تحسب التكاليف الكلية (K) كما يلي:

$$K = K_1 + K_2 + K_3 = \sum_{m=1}^{M} S_m \ X_m + \sum_{m=1}^{M} \ \sum_{P=1}^{P} K_{MP} \ Y_{mp} \sum_{m=1}^{M} \ \sum_{n=1}^{N} C_{mn} \ X_{mn}$$

ويمكن إعادة صياغة النموذج الرياضي أعلاه بشكل عام كما يلي:

المطلوب: إيجاد قيم المتغيرات X_m , X_{mn} , y_{mp}

(حيث أن: m = 1 , 2, …., M, n = 1 , 2, …., N , p = 1, 2 , …, P)

مع تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{m=1}^{M} y_{mp} \leq \ Q_p \qquad (p = 1, 2, ..., P)$$

$$\sum_{n=1}^{N} X_{mn} = X_m \qquad (m = 1, 2, ..., M)$$

$$\sum_{p=1}^{p} y_{mp} = \lambda_p X_m \qquad (m = 1, 2, ..., M)$$

$$\sum_{m=1}^{M} X_{mn} = b_p \qquad (n = 1, 2, ..., N)$$

وكذلك تحقق الشروط $X_m \geq 0 , X_{mn} \geq 0 , y_{mp} \geq 0$

(علماً بأن: $m = 1 , 2 , ..., M , n = 1 , 2,..., N , p = 1 , 2 , ..., P$)

وبما يجعل من قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن، أي:

$$K = \sum_{m=1}^{M} S_m X_m + \sum_{m=1}^{M} \sum_{P=1}^{P} K_{mP} y_{mp} + \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} C_{mn} X_{mn} \longrightarrow Min$$

ثانياً: نموذج الإنتاج المتعدد واستخدامه في اتخاذ القرار الأمثل في توزيع المواقع والمهام الإنتاجية

بموجب النماذج الرياضية السابقة، يتم معالجة المشكلات الإنتاجية عندما يكون هناك نوع واحد من المنتجات. إلا أن الأمر يختلف عندما يكون هناك أكثر من نوع واحد من المنتجات، حيث يتطلب ذلك تحوير صيغة النموذج الرياضي لكي يأخذ بنظر الاعتبار التعدد في أنواع المنتجات المذكورة. ولتوضيح هذه الفكرة نقدم أدناه المثال الافتراضي المتعلق بوضع خطة لـ M مصنع إنتاجي تكلف بمهمة تصنيع L من أنواع المنتجات.

إن المنتجات التي يتم تصنيعها ترسل إلى N مركز استلام. حيث أن الحاجة للمنتوج في n (حيث أن: $n = 1, 2, .., N$) مركز استلام بالنسبة لـ L (حيث أن: $L = 1, 2, ..., L$) نوع من المنتجات تبلغ b_{1n} وحدة.

مجموع الإنفاق الاستثماري على L نوع من المنتجات في الموقع الإنتاجي m يبلغ S_{lm} وحدة نقدية.

كلفة الوحدة الواحدة من L من المنتجات من m موقع إنتاجي إلى n مركز استلام تبلغ C_{lmn} وحدة نقدية.

المطلوب: صياغة نموذج الإنتاج المتعدد لغرض استخدامه في اتخاذ القرار الأمثل عند توزيع المواقع والمهام الإنتاجية، مع اعتماد أقل كلفة كلية ممكنة للانفاقات المتحققة كمؤشر للأمثلية. ويجري ذلك في إطار افتراضي، بحيث أن حجم إنتاج كل نوع من أنواع المنتجات في كل موقع إنتاجي يمكن أن يقدر بوحدات معينة متفق عليها.

الحل: نفرض أن X_m (حيث أن: $m = 1, 2, ..., M$) هو مجموع حجم الإنتاج (بوحدات متفق عليها) يجري تصنيعه في الموقع الإنتاجي m.

X_{lm} (حيث أن: $l = 1, 2, ..., L, m = 1, 2, ..., M$) حجم الإنتاج من L من الأنواع التي يجري تصنيعها في الموقع الإنتاجي m.

X_{lmn} (حيث أن: $l = 1, 2, ..., Lm = 1, 2, ..., M, n = 1, 2, ..., N$)

حجم الإنتاج من L من الأنواع التي يجري تصنيعها في الموقع الإنتاجي m. والمرسلة إلى n مركز استلام.

قيم المتغيرات الأساسية ينبغي أن تكون موجبة، أي أن:

$X_m \geq 0 , X_{lm} \geq 0 , X_{lmn} \geq 0$

على أساس الفرضية السابقة وهي أن إنتاج كل نوع من أنواع المنتجات في كل موقع إنتاجي يمكن أن يقدر بوحدات معينة متفق عليها، يتم صياغة الشرط التالي:

$$\sum_{l=1}^{L} X_{lm} = X_m \quad (m = 1 , 2 ,..., M)$$

إن هذا الشرط يعني أن حجم الإنتاج لكل نوع من أنواع المنتجات في كل موقع إنتاجي محسوب بوحدات متفق عليها في m موقع إنتاجي يبلغ X_m، وإن الحاجة الموجودة في n مركز استلام وذلك بأن لـ L نوع من المنتجات تبلغ b_{ln} ، ومنه يتم صياغة الشرط التالي:

$$\sum_{m=1}^{M} X_{lmn} = b_{ln} \qquad (l = 1 , 2 ,..., L, n = 1 , 2 ,..., N)$$

حجم الإنتاج من L من أنواع المنتجات في m موقع إنتاجي ينبغي أن يساوي مقدار ما مطلوب إرساله من هذه المنتجات ومن هذه المواقع إلى كافة مراكز الاستلام، أي أن:

$$\sum_{n=1}^{N} X_{lmn} = X_{lm} \qquad (l = 1 , 2 ,..., L, \ m = 1 , 2 ,..., M)$$

إن مجموع التكاليف في كافة المواقع الإنتاجية تبلغ:

$$K_1 = \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} g_{lm} X_{lm}$$

وإن مجموع تكاليف النقل تبلغ:

$$K_2 = \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} C_{lmn} X_{lmn}$$

وإن مجموع الإنفاق الاستثماري المتحقق لإنتاج L وحدة من المنتجات في كافة المواقع الإنتاجية تبلغ:

$$K_3 = \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} S_{\ln} X_{\ln}$$

وعليه فإن مجموع التكاليف الكلية تحسب كما يلي:

$$K = k_1 + k_2 + k_3$$

$$= \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} g_{lm} X_{lm} + \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} C_{lmn} X_{lmn} + \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} S_{lm} X_{lm}$$

$$= \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} (g_{lm} + X_{lm}) X_{lm} + \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} C_{lmn} X_{lmn}$$

ويمكن إعادة صياغة النموذج الرياضي أعلاه بشكل عام كما يلي:

المطلوب: تحديد قيم المتغيرات الأساسية X_m , X_{lm} , X_{lmn}

(حيث أن: $l = 1 , 2 , ..., L , m = 1 , 2 , ..., M, n = 1 , 2 ,..., N$)

التي تحقق الشروط التالية:

$$\sum_{l=1}^{L} X_{lm} = X_m \quad (m = 1 , 2 ,..., M)$$

$$\sum_{m=1}^{M} X_{lmn} = b_{\ln} \qquad (l = 1 , 2 ,..., L , n = 1 , 2 ,..., N)$$

$$\sum_{n=1}^{N} X_{lmn} = X_{lm} \qquad (l = 1 , 2 ,..., L , m = 1 , 2 ,..., M)$$

وكذلك الشروط التالية:

$X_m \geq 0 , X_{lm} \geq 0 , X_{lmn} \geq 0$

(حيث أن: $l = 1 , 2 , ..., L , m = 1 , 2 , ..., M, n = 1 , 2 ,..., N$)

وبما يجعل من قيمة دالة الهدف أقل ما يمكن أي أن:

$$K = \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} (g_{lm} + S_{lm}) X_{lm} + \sum_{l=1}^{L} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=1}^{N} C_{lmn} X_{lmn} \longrightarrow Min$$

2.5. نماذج النقل ذات دالة الهدف المزدوجة أو النسبية

قد يواجه متخذ القرار في الواقع العملي مشكلة نقل غير نمطية تختلف عن المشاكل السابقة بأن دالة الهدف مزدوجة يكون المطلوب فيها تحقيق هدفين في آن واحد. أي على سبيل المثال يكون المطلوب تعظيم الدالة يمكن أن يعبر عنه بمؤشر معين يجمع بين الوجه الأول والثاني للدالة. ولو كان لدينا ما يلي:

W ← الربح (الوجه الأول لدالة الهدف)

K ← الربح (الوجه الثاني لدالة الهدف)

وكانت لدينا العلاقة:

فإن e ⇐ هي مؤشر الفاعلية، الكفاءة.... الخ ويعرف أيضاً بدالة الهدف.

ولتوضيح فكرة النموذج الذي يعبر عن هذا النوع من المشاكل نذكر أدناه ما يلي:

1- التعاريف الأساسية.

X_{ij} (i = 1 , 2 , …, m, j = 1 , 2 ,…, n) كمية أو حجم البضاعة التي ينبغي نقلها باستخدام وسيلة النقل (i) إلى موقع الاستلام (j).

a_i (i = 1 , 2 , …, m) الطاقة الاستيعابية لوسيلة النقل (i).

b_j (j = 1 , 2 , …, n) كمية البضاعة المطلوبة من قبل موقع الاستلام (j).

K_{ij} (i = 1 , 2 , …, m , j = 1 , 2 , …, n) تكاليف تشغيل وسيلة النقل (i) المتجهة إلى موقع الاستلام (j).

w_{ij} (i = 1 , 2 , …, m , j = 1 , 2 , …, n) مقدار الربح أو العوائد التي يمكن الحصول عليها نتيجة استغلال وسيلة النقل (i) المتجهة إلى موقع الاستلام (j).

2- جدول النقل (على سبيل المثال لو أن هناك ثلاث وسائل نقل A , B , C وكان هناك أربعة مواقع استلام).

جدول رقم (5-9)

رقم موقع الاستلام → / رقم وسيلة النقل ↓	no. 1	no. 2	no. 3	no. 4	قابلية وسائل النقل على نقل البضاعة ↓
A	W_{11} X_{11} K_{11}	W_{12} X_{12} K_{12}	W_{13} X_{13} K_{13}	W_{14} X_{14} K_{14}	a_A
B	W_{21} X_{21} K_{21}	W_{22} X_{22} K_{22}	W_{23} X_{23} K_{23}	W_{24} X_{24} K_{24}	a_B
C	W_{31} X_{31} K_{31}	W_{32} X_{22} K_{32}	W_{33} X_{33} K_{33}	W_{34} X_{34} K_{34}	a_C
كمية البضاعة المطلوبة →	b_1	b_2	b_3	b_4	

استناداً إلى الجدول أعلاه فإن قيمة W تحسب كالآتي:

$$w = w_{11} X_{11} + w_{12} X_{12} + w_{13} X_{13} + w_{14} X_{14} + w_{21} X_{21} + w_{22} X_{22}$$
$$+ w_{23} X_{23} + w_{24} X_{24} + w_{31} X_{31} + w_{32} X_{32} + w_{33} X_{33} + w_{34} X_{34}$$

ويمكن كتابة العادلة أعلاه وفق الصيغة العامة التالي:

$$W = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} w_{ij} X_{ij} \longrightarrow Max$$

في حين يتم حساب قيمة K طبقاً للبيانـات والتـي وردت في الجـدول (5-9) وكما يلي:

$$K = K_{11} X_{11} + K_{12} X_{12} + K_{13} X_{13} + K_{14} X_{14} + K_{21} X_{21} + K_{22} X_{22}$$
$$+ K_{23} X_{23} + K_{24} X_{24} + K_{31} X_{31} + K_{32} X_{32} + K_{33} X_{33} + K_{34} X_{34}$$

ويمكن كتابة للمعادلة أعلاه وفق الصيغة العامة التالي:

$$K = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} K_{ij} X_{ij} \longrightarrow Min$$

وعليه فإن قيمة e يمكن أن تحسب كما يلي:

$$e = \frac{W}{K} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} w_{ij} X_{ij}}{\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} K_{ij} X_{ij}}$$

على افتراض أن كمية البضاعة المنقولة باستخدام وسيلة النقل تساوي الطاقة الاستيعابية للوسيلة المذكورة (قابلية وسيلة النقل على نقل البضاعة) فإن التعبير عن ذلك رياضياً يتم على الوجه التالي:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} = a_A$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} = a_B$$
$$X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} = a_C$$

وكان هناك افتراض آخر يشير إلى أن كمية البضاعة المرسلة إلى كل موقع استلام ينبغي أن يساوي حاجة الموقع المعين، أي أن:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = b_1$$
$$X_{21} + X_{22} + X_{32} = b_2$$
$$X_{13} + X_{23} + X_{33} = b_3$$
$$X_{14} + X_{24} + X_{34} = b_4$$

وعلى أساس ذلك فإن المشكلة ينبغي اعتبارها من مشاكل النقل المغلق وذلك لأن:

$$a_A + a_B + a_C = b_1 + b_2 + b_3 + b_4$$

المشكلة أدناه توضح فكرة اتخاذ القرار الأمثل لمعالجة عملية نقل معينة وذلك على أساس نموذج رياضي تكون فيه دالة الهدف مزدوجة.

المشكلة رقم (1): منظمة خدمية تتخصص في النقل البحري تملك ثلاث أنواع من البواخر A , B , C تقوم هذه البواخر بنقل حمولات معينة من البضائع إلى أربعة موانئ هي ميناء رقم (1) ميناء رقم (2) ميناء، رقم (3) ميناء رقم (4).

إن طاقة النقل للبواخر الثلاث هي كما يلي:

A ⇐ 30 الباخرة ألف طن/ ميل

B ⇐ 40 الباخرة ألف طن/ ميل

C ⇐ 20 الباخرة ألف طن/ ميل

إن مقدار البضاعة المخطط نقلها إلى كل ميناء هي كالآتي:

إلى الميناء رقم (1) ⇐ 20 ألف طن / ميل

إلى الميناء رقم (2) ⇐ 30 ألف طن / ميل

إلى الميناء رقم (3) ⇐ 30 ألف طن / ميل

إلى الميناء رقم (4) ⇐ 10 ألف طن / ميل

تكاليف تشغيل البواخر الثلاث (A , B , C) ومقدار العوائد النقدية من العملة الصعبة محسوبة لكل (1) ألف طن/ ميل لقاء نقل البضائع إلى الموانئ المذكورة هي كما في الجدول التالي:

جدول رقم (5-10)

الباخرة	الميناء	رقم (1)	رقم (2)	رقم (3)	رقم (4)
A	عوائد	3	6	4	9
	تكاليف	20	30	20	40
B	عوائد	7	4	8	3
	تكاليف	30	20	50	10
C	عوائد	8	5	4	11
	تكاليف	40	30	20	60

طلبت المنظمة من إدارة التسويق والنقل دراسة المشكلة وذلك لوضع خطة النقل التي تؤمن لها الحصول على أقصى فاعلية نقدية بالعملة الصعبة (أقصى مقدار من النقد الأجنبي مقاساً بالوحدة الواحدة من تكاليف التشغيل). أي أن المطلوب هو أقصى قيمة ممكنة للمقدار e حيث أن:

$$e = \frac{W}{K}$$

W = الربح محسوباً بالعملات الأجنبية

K = تكاليف التشغيل.

e = دالة الهدف وتمثل أقصى فاعلية نقدية محسوبة بالعملات الأجنبية.

الحل: إن إدارة التسويق والنقل هي من أهم الإدارات في هذا النوع من المنظمات التي تتخصص بالنشاطات الخدمية وبالذات النقل البحري، حيث أن عمل هذه الإدارة يشبه إلى حد ما عمل إدارة الإنتاج في المنظمات الإنتاجية. وقد شكلت الإدارة المذكورة لجنة بحثية خاصة لدراسة هذه المشكلة. التي بدأت عملها بوضع الافتراضات التالية:

X_{ij} ($i = 1 , 2 , 3,\ j = 1 , 2 , 3 , 4$) كمية البضاعة المنقولة بواسطة الباخرة (i) إلى الميناء (j).

a_i $(i = 1 ,. 2 , 3)$ الطاقة الاستيعابية للباخرة (i).

b_j $(j = 1 ,. 2 , 3 , 4)$ مقدار البضاعة المطلوبة من قبل الميناء (j).

K_{ij} $(i = 1 , 2 , 3 ,\ j = 1 ,. 2 , 3 , 4)$ تكاليف تشغيل الباخرة (i) إلى الميناء(j).

w_{ij} $(i = 1 , 2 , 3 ,\ j = 1 ,. 2 , 3 , 4)$ تكاليف تشغيل الباخرة (i) إلى الميناء(j).

الفرضيات أعلاه يمكن تحديد مواقعها في جدول النقل كالآتي:

جدول رقم (5-11)

الميناء / الباخرة	رقم 1	رقم 2	رقم 3	رقم 4	قابلة البواخر على النقل
A(1)	w_{11} X_{11} K_{11}	w_{12} X_{12} K_{12}	w_{13} X_{13} K_{13}	w_{14} X_{14} K_{14}	a_1
B(2)	w_{21} X_{21} K_{21}	w_{22} X_{22} K_{22}	w_{23} X_{23} K_{23}	w_{24} X_{24} K_{24}	a_2
C (3)	w_{31} X_{31} K_{31}	w_{32} $X_{2,2}$ K_{32}	w_{33} $X_{2,3}$ K_{33}	w_{34} $X_{2,4}$ K_{34}	a_3
كمية البضاعة المطلوبه	b_1	b_2	b_3	b_4	

المقدار الكلي من العملة الأجنبية التي يتم ربحها يحسب كالآتي:

$$w = w_{11} X_{11} + w_{12} X_{12} + w_{13} X_{13} + w_{14} X_{14} + w_{21} X_{21} + w_{22} X_{22}$$
$$+ w_{231} X_{23} + w_{24} X_{24} + w_{31} X_{31} + w_{32} X_{32} + w_{33} X_{33} + w_{34} X_{34}$$
$$= \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} W_{ij} . X_{ij}$$

تكاليف التشغيل الكلية K تحسب كالآتي:

$$K = K_{11} X_{11} + K_{12} X_{12} + K_{13} X_{13} + K_{14} X_{14} + K_{21} X_{21} + K_{22} X_{22}$$
$$+ K_{23} X_{23} + K_{24} X_{24} + K_{31} X_{31} + K_{32} X_{32} + K_{33} X_{33} + K_{34} X_{34}$$
$$= \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=1}^{3} K_{ij} . X_{ij}$$

فاعلية العملة الصعبة (دالة الهدف) e يتم حسابها كالآتي:

$$e=\frac{W}{K}=\frac{\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} w_{ij}\,X_{ij}}{\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} K_{ij}\,X_{ij}}$$

من منطوق المشكلة يمكن أن نستنتج بأن:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i=\sum_{j=1}^{4} b_j$$

أي أن المشكلة تدخل في إطار مشاكل النقل المغلق. ويتم اللجوء إلى أحد طرق الحل المعروفة في هذا الصدد لإيجاد الحل الابتدائي الممكن لهذه المشكلة. ولو تم استخدام طريقة الركن الشمالي الغربي، فإن ذلك يؤدي إلى الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (5-12)

الميناء / الباخرة	الميناء (1)	الميناء (2)	الميناء (3)	الميناء (4)	a_1
A	3 20 20	6 10 30	4 20	9 40	30
B	7 30	4 20 20	8 20 50	3 10	40
C	8 40	5 30	4 10 20	11 10 60	20
b_j	20	30	30	10	90 \ 90

وتحسب قيم K_{ij} و W_{ij} كما يلي:

$$K = 20 X 20 + 30 X10 + 20 X20 +50 X 20 +20 X 10 +60 X 10= 2900$$

$$W = 3 X 20 +6 X10 + 4 X20 +8X20 +4 X 10 +11X 10=510$$

وعليه فإن قيمة e تحسب كما يلي:

$$e=\frac{w}{k}=\frac{510}{2900}\ 0.176$$

الخطوة التالية هو تحسين الحل الذي تم الحصول عليه أعلاه. حيث أن الحل باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي لا يأخذ الكلفة بنظر الاعتبار، وعليه يتم اللجوء إلى أحد طرق حساب الحل الأمثل، حيث يتم ذلك كما يلي:

1- يتم تحديد المربعات الفارغة (i , j) .

2- المربعات الفارغة هي: (1.3) ، (1.4) ، (2.1) ، (3.1) ، (2.4) ، (3.2).

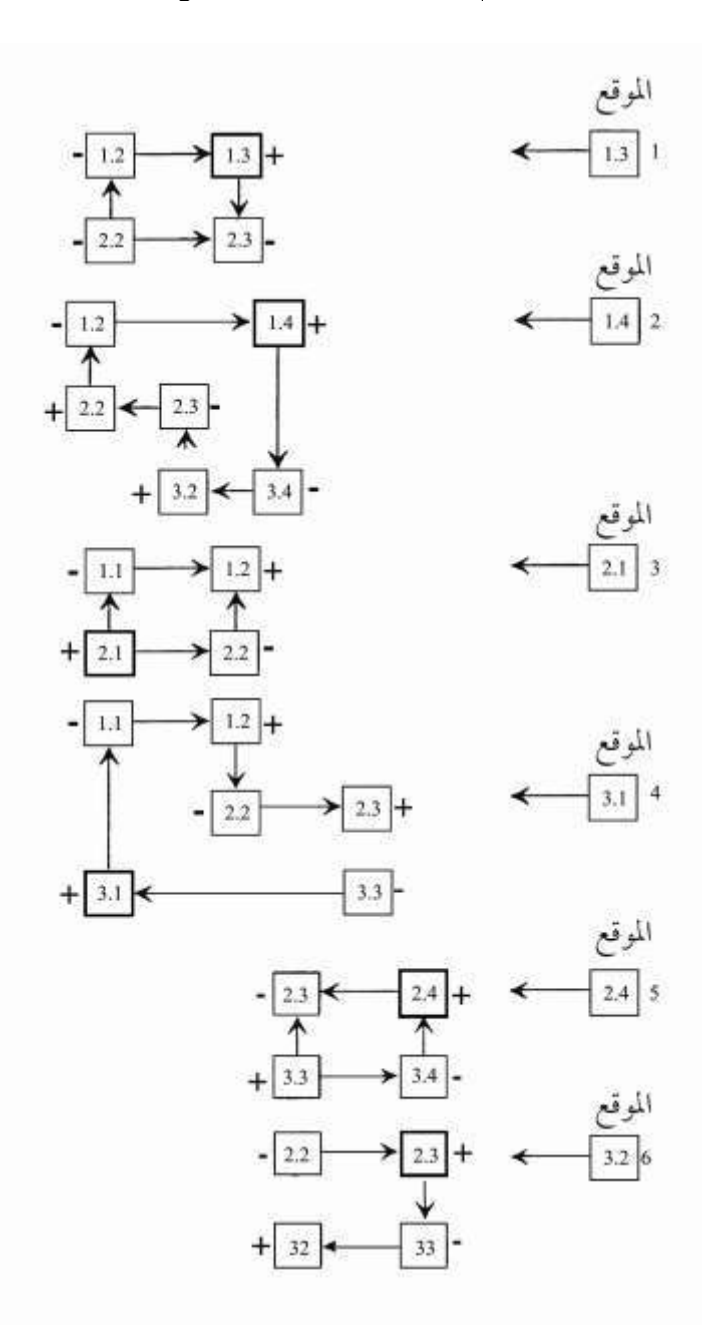
3- المربعات الفارغة الذي تم تحديدها تحمل علامة موجبة منه يجري الاتجاه إلى المربعات الأخرى المجاورة في هيئة حلقة مفرغة يتناوب فيها الإشارات الموجبة السالبة (أي أن: + , - , + , - , ... وهكذا).

4- يمر السهم الذي يربط بين المربعات في الجدول باثنين من المربعات المشغولة في الصف واثنين من المربعات المشغولة في العمود.

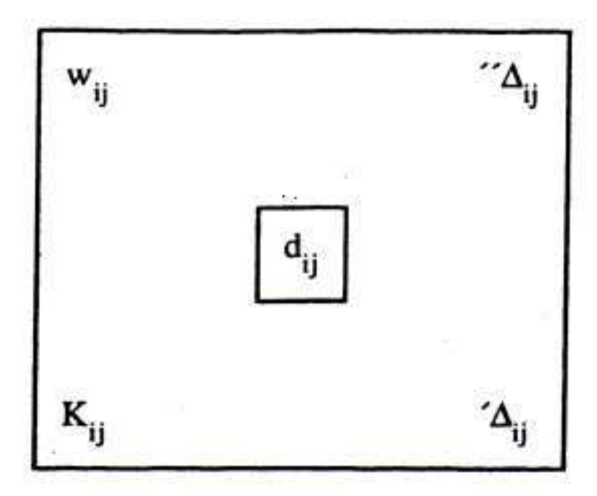
إن الخطوات أعلاه يمكن توضيحها من خلال الشكل (5-3) الذي يوضح مسارات التغيير في مربعات النقل الكائن في جدول النقل.

إن الاستمرار في عمليات التغيير وتحسين الحل الذي يتم التوصل إليه يتطلب تحديد القيم الكائنة في مربع النقل وذلك كما يلي:

الشكل رقم (3-5) مسارات التغير في مواقع النقل



الشكل رقم (5-4)



حيث أن:

W_{ij} ← مقدار العوائد النقدية من العملة الصعبة المتحققة نتيجة لاستغلال الباخرة (i) ضمن خط الميناء (j).

K_{ij} ← تكاليف تشغيل الباخرة (i) إلى الميناء (j).

Δ'_{ij} ← المجموع الجبري لعناصر المتغير W_{ij} الموجود في نفس مربع النقل والواقع في إطار مسارات التغيير الموضحة بالشكل (5-3) مع الإشارات الموجبة والسالبة لها.

Δ''_{ij} ← المجموع الجبري لعناصر المتغير W_{ij} الموجود في نفس مربع النقل والواقع في إطار مسارات التغيير الموضحة بالشكل (5-3) مع الإشارات الموجبة والسالبة لها.

d_{ij} ← تكاليف تشغيل الباخرة (i) إلى الميناء (j).

$$d_n = \begin{bmatrix} {}^{''}\Delta & W \\ {}^{'}\Delta & K \end{bmatrix}$$

لغرض إيجاد المتغير d_{ij} يتطلب تحديد قيم Δ'_{ij}، Δ''_{ij} وذلك كما يلي :

(1) الموقع (1.3) ⟵
$$\begin{matrix} \Delta'_{13} = K_{13} - K_{23} + K_{22} - K_{12} = -40 \\ \Delta''_{13} = W_{13} - W_{23} + W_{22} - W_{12} = -6 \end{matrix}$$

(2) الموقع (1.4) ⟵
$$\begin{matrix} \Delta'_{14} = K_{14} - K_{34} + K_{33} - K_{23} + K_{22} - K_{12} = -60 \\ \Delta''_{14} = W_{14} - W_{34} + W_{33} + W_{22} - W_{23} + W_{12} = -8 \end{matrix}$$

(3) الموقع (2.1) ⟵
$$\begin{matrix} \Delta'_{21} = K_{21} - K_{22} + K_{12} - K_{11} = -20 \\ \Delta''_{21} = W_{21} - W_{22} + W_{12} - W_{11} = 6 \end{matrix}$$

(4) الموقع (2.4) ⟵
$$\begin{matrix} \Delta'_{24} = K_{24} - K_{23} + K_{33} - K_{34} = -80 \\ \Delta''_{24} = W_{24} - W_{23} + W_{33} - W_{34} = -12 \end{matrix}$$

(5) الموقع (3.1) ⟵
$$\begin{matrix} \Delta'_{31} = K_{31} - K_{11} + K_{12} - K_{22} + K_{23} - K_{33} = 60 \\ \Delta''_{31} = W_{31} - W_{11} + W_{12} - W_{32} + W_{23} - W_{33} = 11 \end{matrix}$$

(6) الموقع (3.2) ⟵
$$\begin{matrix} \Delta'_{32} = K_{32} - K_{22} + K_{23} - K_{33} = 40 \\ \Delta''_{32} = W_{32} - W_{22} + W_{23} - W_{32} = 5 \end{matrix}$$

يتم حساب قيم d_{ij} للمربعات (ij) وذلك كما يلي:

(1) الموقع (1.3) ⟵ $d_{13} = \begin{bmatrix} -6 & 510 \\ -40 & 2900 \end{bmatrix} = (-6 \times 2900) - (-40 \times 510) = 3000$

وهكذا بالنسبة لبقية المواقع، حيث أن يتم d_{ij} هي كما يلي:

(2) الموقع (1.4) ⟵ $d_{14} = \begin{bmatrix} -8 & 510 \\ -60 & 2900 \end{bmatrix} = 7400$

(3) الموقع (2.1) ⟵ $d_{21} = \begin{bmatrix} 6 & 510 \\ 20 & 2900 \end{bmatrix} = 7200$

(4) الموقع (2.4) ⟵ $d_{24} = \begin{bmatrix} -12 & 510 \\ -80 & 2900 \end{bmatrix} = 6000$

(5) الموقع (3.1) ⟵ $d_{31} = \begin{bmatrix} 11 & 510 \\ 60 & 2900 \end{bmatrix} = 1300$

(6) الموقع (3.2) ⟵ $d_{32} = \begin{bmatrix} 5 & 510 \\ 40 & 2900 \end{bmatrix} = -5900$

على ضوء ما تقدم يتم تنظيم الجدول رقم (5-13) التالي:

جدول رقم (5-13)

الميناء / الباخرة	الميناء 1	الميناء 2	الميناء 3	الميناء 4	a_i
A	3 20 20	6 10 30	4 −4 3000 6 −40	9 -8 7400 40 -60	30
B	7 6 7200 30 20 —	4 20 20	8 20 50	3 -12 6000 10 -80	40
X	8 11 1300 40 60	5 5 -5900 30 40	8 10 40 20	11 10 60	20
b_j	20	30	30	10	90 \ 90

W = 510

K = 2900

e = 0.176

الجدول رقم (5-13) يعرض الحل الممكن للمشكلة. وهو ليس بالحل الأمثل، حيث أن الحل يكون أ مثلاًإذا كانت قيم d_{ij} أكبر ما يمكن. من الجدول (5-13) يتضح أن المربع (1.4) يحوي أكبر قيمة موجبة 7400 . ويتم رسم للمربع المذكور حلقة جديدة وذلك كما في الشكل التالي:

الشكل رقم (5-5)

− (1,2) 10 - λ → (1,4) λ +

+ (2,2) 20+ λ ← (2,3) 20 - λ −

+ (3,3) 10+ λ ← (3,4) 10 - λ −

حيث أن: $\lambda = \min\{10, 20, 10\} = 10$

إن نقل التعديلات والتغييرات المتحققة بموجب الشكل رقم (5-5) إلى الجدول السابق (5-13) يؤدي ذلك الحصول على صيغة جديدة لجدول النقل بما في ذلك قيم جديدة للمتغير d_{ij} وذلك كما يلي:

جدول رقم (5-14)[1]

الميناء / الباخرة	الميناء 1	الميناء 2	الميناء 3	الميناء 4	a_i
A	3 · 20 · 20	6 · 0 · 30	4 · -6 · [3400] · 20 · -40	9 · 1[illegible] · 40	30
B	7 · 6 · [5200] · 30 · 20	4 · 30 · 20	8 · 10 · 50	3 · -12 · [-600] · 10 · -80	40
C	8 · 11 · [-500] · 40 · 60	5 · 5 · [-5700] · 30 · 40	4 · 20 · 20	11 · [-7400] · 60	20
b_j	20	30	30	10	90 / 90

W = 430

K = 2300

e = 0.186

للجدول (5-14) يتم حساب قيم المتغيرات e , K , w وقد كانت كما يلي:

([1]) في المربع (1.2) تم الإبقاء على القيمة () = X12 - λ وذلك لكي لا يكون الحل Degeneration .

إن ذلك يتحقق إذا كانت عدد المربعات المشغولة في الجدول يحقق العلاقة التالية:

m + n = 1 حيث أن m ← عدد الصفوف

3 + 4-1 = 6 n ← عدد الأعمدة

$$W = 430 \ , K = 2300, \ e = \frac{430}{2300} = 0.187$$

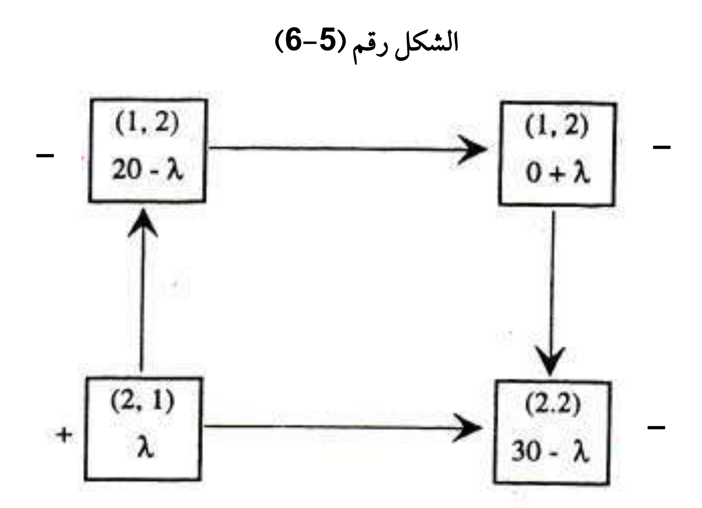
الخطوة التالية هو حساب قيم Δ_{ij}' ، Δ_{ij}'' وذلك للمربعات :

(1.3) ، (2.1) ، (2.4) ، (3.1) ، (3.2) أ (3.4).

وبعد حساب القيم Δ_{ij}'' ، Δ_{ij}' يتم إيجاد قيمة d_{ij} للمربعات ذاتها.

إن البدء بحساب قيم جديدة لـ d_{ij} يكون من المربع (2.1) الذي يحوي أكبر قيمة (5200) حيث يجري رسم مخطط، كما مر معنا سابقاً يتجه إلى المربعات المجاورة بحيث يتم ربط كل مربعين في صف أو عمود وذلك كما يلي:

الشكل رقم (5-6)



حيث أن: $\lambda = \min\{20, 0, 30\} = \min\{20, 30\} = 20$

إن حصيلة المتغيرات يتم توضيحها من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (5-15)

الميناء / الباخرة	الميناء 1	الميناء 2	الميناء 3	الميناء 4	a_i
A	3 -6 -5200 40 20	6 20 30	4 -6 5800 20 -40	9 10 40	30
B	7 20 30	6 4 10 30 20	8 10 50	3 -4 200 10 -20	40
C	8 5 -8500 40 40	5 5 -8500 30 40	4 20 20	11 6 -5800 60 40	20
b_j	20	30	30	10	90 \ 90

W = 550

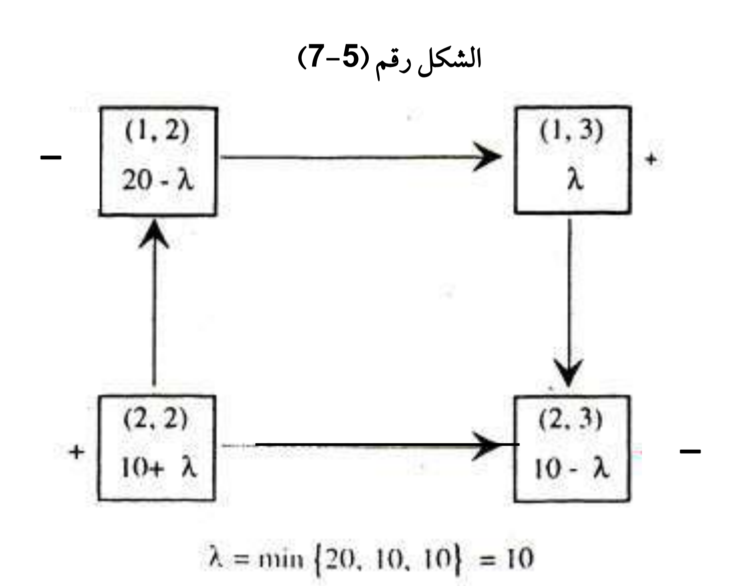
K = 2700

$$e = \frac{550}{2700}$$

e = 0.200

المربع (1.3) يحوي أكبر قيمة لـ d_{ij} ، لذلك تبدأ التغييرات في المربـع المـذكور وذلك كما يلي:

الشكل رقم (5-7)



$\lambda = \min\{20, 10, 10\} = 10$

إن نتيجة التغييرات التي تتم كما في الشكل (5-7) على بيانات الجـدول (5-15) يؤدي إلى الحصول على الجدول التالي:

جدول رقم (5-16)

الميناء / الباخرة	الميناء 1	الميناء 2	الميناء 3	الميناء 4	a_i
A	3 -6 [-4000] 20 -20	6 10 30	4 10 20	9 10 40	30
B	7 20 20 30	4 20 20	8 6 [-5400] 50 40	3 -4 [600] 10 -20	40
C	8 -1 [-2300] 40 0	5 -1 [-2300] 30 0	4 20 20	11 2 [-5200] 60 20	20
b_j	20	30	30	10	90 \ 90

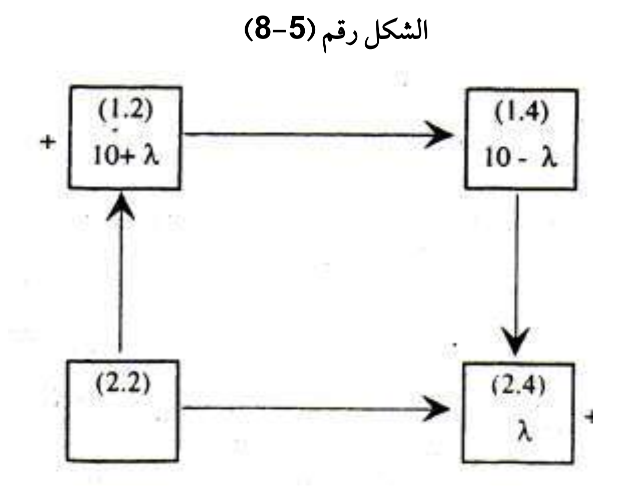
W = 490

K = 2300

$$e = \frac{490}{7300} = 0.213$$

إن الحل في الجدول (16.5) ليس بالحل الأمثل لأن هناك لا تزال قيم موجبـة لـ d_{ij} لذلك يتم تنفيذ عملية تغييرات أخرى كما يلي:

الشكل رقم (5-8)



$\lambda = \min\{10, 10, 20\} = 10$

إن الحل في الجدول (5–16) ليس بالحل الأمثل لأن هناك لا تزال قيم موجبة لـ d_{ij} لذلك يتم تنفيذ عملية تغييرات أخرى كما يلي:

جدول رقم (5–17)

الميناء / الباخرة	الميناء 1	الميناء 2	الميناء 3	الميناء 4	a_i
A	3 -6 [-3600] 20 -20	6 20 30	4 10 20	9 4 [-600] 40 20	30
B	7 20 30	4 10 20	8 4 [-5400] 50	3 10 10	40
C	8 -1 [-2100] 40 0	5 -1 [-2100] 30 0	4 20 20	11 6 [-5400] 60 40	20
b_j	20	30	30	10	90 \ 90

W = 450

K = 2100

$e = \frac{450}{2100} = 0.214$

إن الحل الذي تم التوصل إليه في الجدول (5–17) هو الحـل الأمثـل وذلـك لأن كافة المربعات الخالية من النقل والتي تم فيها حساب قيم d_{ij} أصـحبت ذات قيم سالبة. بموجب هذا الحل تكون أعلى فاعلية للنقد الأجنبي هي:

$$e = \frac{W}{K} = \frac{450}{2100} = 0.214$$

ولو كانت قيمة لها محسوبة بالدولار وقيمة K محسوبة بالدينار فإن قيمة e يعبر عنها كما يلي:

$$e = 0.214 \frac{\text{دولار}}{\text{دينار}}$$

وهو يعني لو تم استثمار 1000 دينار، فإن ذلك سوف يحقق للمنظمة إيراداً بالعملة الصعبة مقداره 214 دولار.

إن مفردات خطة النقل المقترحة هي كما يلي:

A. الباخرة
$$\begin{cases} 0 = X_{11} \\ 20 = X_{12} \\ 10 = X_{13} \\ 0 = X_{14} \end{cases}$$

الباخرة من النوع A ينبغي أن تقوم بنقل بضائع إلى ميناء رقم (1) وميناء (3) فقط. ومقدار الحمولة التي ينبغي نقلها هي على التوالي 20 و 10 طن/ ميل.

B. الباخرة
$$\begin{cases} 20 = X_{21} \\ 10 = X_{22} \\ 0 = X_{23} \\ 10 = X_{24} \end{cases}$$

الباخرة من النوع B ينبغي أن تقوم بنقل بضائع إلى ميناء رقم (1) وميناء (2) ورقم (4)، وإن ومقدار الحمولة التي ينبغي نقلها هي على التوالي 20 و 10 و10طن/ ميل.

C. الباخرة
$$\begin{cases} 0 = X_{31} \\ 0 = X_{32} \\ 20 = X_{33} \\ 0 = X_{34} \end{cases}$$

إن الطاقة النقلية للباخرة C ينبغي أن تكرس فقط للميناء رقم (3) وأن مقدار الحمولة المكلفة بها الباخرة المذكورة هي طن/ ميل.

3.5. نماذج التخصيص Assignment Models

تعتبر نماذج التخصيص أحد النماذج الرياضية المشتقة من نماذج النقل، حيث أن هدفها أيضاً المساعدة في اتخاذ القرار الرشيد أو الأمثل بخصوص نقل موارد معين بين مراكز التوزيع والاستلام. إلا أنها تختلف عن نماذج النقل في أن مسارات النقل محدودة ومعروفة مقدماً. أي ن:

$$X_{ij} \longrightarrow \begin{cases} (1) \text{ إذا تم تخصيص وسيلة نقل للمسار في (i) إلى (j)} \\ (0) \text{ إذا لم تم تخصيص وسيلة نقل للمسار في (i) إلى (j)} \end{cases}$$

فيما يلي عرض لبعض مشاكل التخصيص مع بيان لكيفية صياغة النموذج الرياضي اللازم لاتخاذ القرار الأمثل في معالجة المشكلة المذكورة.

مشكلة رقم (1): تملك منظمة أعمال معينة ثلاث وسائل نقل هي S_1 , S_2 , S_3 ترغب في توظيفها بخدمة ثلاث مسارات نقل هي T_1 , T_2 , T_3 إن تكاليف تشغيل وسيلة النقل S_j على المسار T_i هي كما في المصفوفة التالية:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 6 \\ 9 & 10 & 7 \end{bmatrix}$$

طلبت إدارة المنظمة من دائرة الحركة والنقل العمل على وضع خطة لتوزيع عمل وسائل النقل الثلاث بين المسارات الثلاث بحيث تكون مجموع تكاليف النقل أقل ما يمكن.

الحل: إن المشكلة قيد الدرس هي من مشاكل النقل المغلق. يتم حلها من خلال تحديد قيم للمتغير X_{ij} الذي يمثل كمية البضاعة الواجب نقلها إلى مراكز الاستلام باستخدام وسائل النقل الثلاث S_1 , S_2 , S_3 حيث أن:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix} = [X_{ij}]$$

(حيث أن: $i , j = 1 , 2 , 3$).

حيث أن: $X_{ij} \longrightarrow$ (1) إذا كانت وسيلة النقل محدودة للمسار ($i - j$).
(0) إذا كانت وسيلة النقل لم تخصص للمسار ($i - j$).

المصفوفة X أعلاه لها خاصية معينة تختلف عما جاء في مشاكل النقل السابقة، حيث أن مجموع العناصر في كل صف من الصفوف وحتى أي عمود يساوي واحد.

ومن أجل إيجاد الحل للمشكلة أعلاه يتم بناء الجدول التالي:

S \ T	S_1	S_2	S_3	a_i
T_1	4	4	5	1
T_2	7	8	6	1
T_3	9	10	7	1
bj	1	1	1	3 \ 3

وبالرجوع إلى النظريات السابقة، التي تنص على أن الحل الأمثل لا يتغير فيما لو تم إيجاد على الأقل قيمة صفرية واحدة وذلك في أي عمود أو صف من مصفوفة التكاليفC.

وطبقاً للمخطط الموضح بالشكل (4-3) من الفصل السابق، فإنه يتم تحوير المصفوفة C إلى ما يلي:

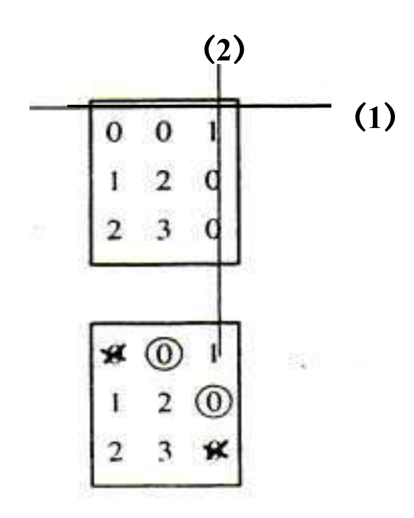
$$\overset{0}{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \overset{1}{C}$$

إن نماذج التخصيص يتم حلها تماماً كما هو في حالة نماذج النقل العادية. حيث يتم تخصيص وسائل نقل طبقا للعناصر الصفرية الموجودة في المصفوفة $\overset{1}{C}$ إلا أن المشكلة هنا هي أقيل تعقيداً مما هو عليه الحال في مشاكل النقل السابقة، وذلك لأن قيمة bj ، aj مساوية إلى1.

الخطوة التالية هو القيام بعملية تحوير للمصفوفة $\overset{1}{C}$ حيث يقتضي الأمر إيجاد ثلاث قيم صفرية بما يساوي عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، بحيث أن أي اثنين من هذه القيم الصفرية المتبقية تسمى بالأصفار المستقلة أو غير المنحازة.

من هذا الموضوع ندرج النظرية التالية:

نظري (Konig) : أقصى عدد من الأصفار المستقلة المطلوب إيجادها في المصفوفة يساوي أقل عدد من الخطوط اللازمة لتغطية كافة القيم الصفرية الموجودة في المصفوفة المذكورة:



إن الصفر المستقل في المصفوفة يتم إيجاده كما يلي:

1. إن الصفر المستقل يقع في الصف أو العمود لوحده. أما إذا وجد صفر آخر فإنه يجب شطب أحدهما.

2. عدد الأصفار المستقلة تساوي عدد المسارات (أو عدد الصفوف أو الأعمدة) اللازمة لتغطية كل الأصفار في المصفوفة الأصلية $\overset{1}{C}$.

3. إذا كانت عدد الأصفار المستقلة لا يساوي عدد المسارات (أو عدد المصفوف أو الأعمدة) فإن المطلوب هو عمل صفر آخر جديد.

4. لكي يتم خلق الصفر الجديد ينبغي إجراء بعض التغييرات في المصفوفة $\overset{1}{C}$. إن التغييرات الجديدة في المصفوفة تقابل التغييرات في جدول النقل وذلك طبقاً للمخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-4) في الفصل السابق.

5. إن الصفر داخل المربع [0] في المصفوفة يقابل $X_{ij} > 0$ في جـدول النقـل.

وعلى هذا المنهج ينبغي الاستمرار لغاية إيجاد النتائج النهائية للمشكلة.

مشكلة رقم (2): المنظمة الإنتاجية A تملك ثلاث خطوط إنتاجيـة A_1, A_2 , A_3 تتوزع هذه الخطـوط في القاعـة الإنتاجيـة في المنظمـة المـذكورة. تقـوم هـذه الخطوط بتوزيع إنتاجها إلى ثلاث مراكز تغليف وتعبئـة B_1 , B_2 , B_3 الطاقـة الإنتاجية للخطوط الإنتاجية للمنظمة A هي كالآتي:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 62 & 54 & 56 \\ 67 & 65 & 53 \\ 29 & 18 & 35 \end{pmatrix} \end{array}$$

من الخصائص الإنتاجية للمنظمة A هو أن كل خط يسـلم إنتاجـه إلى مركـز تغليف واحد فقط. وقد طلبت إدارة المنظمة من دائرة الإنتـاج دراسـة المشـكلة لوضع خطة إنتاجية تضمن تجهيز أكبر كمية ممكنة من الإنتـاج المعـدة للتغليـف وتسليمه إلى مراكز التغليف والتعبئة B_1 , B_2 , B_3.

الحل: المشكلة قيد الدرس مـن مشـاكل التخصـيص وتـدخل ضـمن إطـار مشاكل النقل المغلق. يتم حل هذه المشكلة مـن خـلال تحديـد قيمـة للمتغـير X وحيث أن:

$$X = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix} = [X_{ij}]$$

(حيث أن: $i , j = 1 , 2 , 3$).

حيث أن: $X_{ij} \longrightarrow$ (1) الخط الإنتاجي Ai يحول الإنتاج إلى مركز التغليف Bj.
(0) الخط الإنتاجي Ai يحول الإنتاج إلى مركز التغليف Bj.

إن المصفوفة X لها خاصية معينـة، وهـي أن مجمـوع العنـاصر المحولـة في أي صف. ومن أي عمود يساوي 1، أي أن:

$$\sum_{j=1}^{3} X_{ij} = 1$$ (حيث أن: $i = 1 , 2 , 3$)

$$\sum_{i=1}^{3} X_{ij} = 1$$ (حيث أن: $j = 1 , 2 , 3$)

$A = [a_{ij}] \ (i , j = 1 , 2 , 3)$

إن دالة الهدف Z للمشكلة هي كما يلي:

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X_{ij} \longrightarrow Max$$ أعلى ما يمكن

علماً بأن:

(الخطوط الانتاجية) a_i A_i ⇄ B_j b_j (مراكز التغليف)

مطلوب منها أكبر قدر ممكن من الانتاج

ترغب في استلام أقل كمية ممكنة من الانتاج لكي تتجنب تكديس البضاعة والاختناق

إن دالة الهدف أعلاه يمكن عكسها والبحث فيها من وجهة نظر أخرى وهي مراكز التغليف B_j وذلك كما يلي:

إن دالة الهدف التي تصل إلى أقل ما يمكن هي مرادفة لدالة الهدف التي تصل إلى أكبر ما يمكن، ذلك يتضح من العلاقة الرياضية التالية:

$$Z_1(X) = -Z(X)$$

$$Z_1(X) = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij} \, .X_{ij} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-a_{ij})\, X_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} b_{ij} \, .X_{ij}$$

حيث أن: $B = [\ bij\ ] = [\ -\ aij\ ]$

$i\ ,\ j = 1\ ,\ 2\ ,\ 3$

وعليه فإن مصفوفة الطاقة الإنتاجية السابقة تصبح كما يلي:

$$B = \begin{pmatrix} -62 & -57 & -56 \\ -57 & -65 & -53 \\ -29 & -18 & -35 \end{pmatrix}$$

على أساس هذه المصفوفة يتم بناء الجدول التالي:

جدول رقم (19.5)

الخطوط الإنتاجية \ مراكز التغليف	B_1	B_2	B_3	
A_6	-62	-57	-56	1
A_2	-57	-65	-53	1
A_3	-29	-18	-35	1
b_i	1	1	1	3 \ 3

يتم تحويل المصفوفة B إلى $\overset{1}{B}$ وكما يلي:

$$\overset{1}{B} = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 14 \\ 6 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

في المصفوفة $\overset{1}{B}$ تحدد الأصفار المستقلة:

$$\overset{1}{B} = \begin{bmatrix} [0] & 6 & 6 \\ 0 & [0] & 14 \\ 6 & 15 & [0] \end{bmatrix}$$

المصفوفة $\overset{1}{B}$ تحوي ثلاث عناصر صفرية مستقلة، وبما أن هناك ثلاث مسارات نقل، فإن المشكلة قيد الدرس لها حل.

عناصر المصفوفة (الأصفار المستقلة) لها مسار $\leftarrow X_{ij} = 1$.

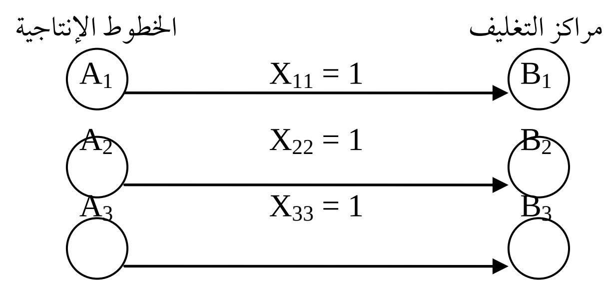
عناصر المصفوفة البقية لا يخصص لها مسار $\leftarrow X_{ij} = 0$.

وبناء على ذلك خطة التخصيص هي كالآتي:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إن خطة التخصيص موضحة كما في الشكل التالي:

شكل رقم (5-9) المسارات التي توضح خطة التخصيص



إن دالة الهدف تحسب استناداً إلى المصفوفة C الأصلية وذلك كما يلي:

$Z = 62\ X1 + 65\ X1 + 35\ X1 = 162$ وحدة

مشكلة رقم (3): المنظمة الإنتاجية (A) تملك خمسة مواقع عمل منتشرة في مواقع جغرافية مختلفة وهي A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5. تقوم هذه المنظمة بإنتاج مواد أولية نصف جاهز. تنقل هذه المواد إلى خمسة مراكز استلام أخرى هي B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 حيث يجري تحويلها إلى بضاعة جاهزة، علماً بأن كل مركز يستلم مواد أولية من موقع عمل واحد فقط. إن تكاليف نقل المواد الأولية يعتمد على بعد موقع العمل (عدد الكيلومترات) عن مراكز الاستلام. وتتضح هذه التكاليف من خلال المصفوفة التالية:

$$C = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 17.5 & 15 & 9 & 5.5 & 12 \\ 16 & 16.5 & 10.5 & 5 & 10.5 \\ 12 & 15.5 & 14.5 & 11 & 5.5 \\ 4.5 & 8 & 14 & 17.5 & 13 \\ 13 & 9.5 & 8.5 & 12 & 17.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

المطلوب: طلبت المنظمة A من إدارة الإنتاج دراسة المشكلة لوضع خطـة تجهيـز مراكز الاستلام بالمواد الأولية نصف الجاهزة بحيث تكون تكاليف التجهيـز أقل ما يمكن.

الحل: إن حل هذه المشكلة قائم على أساس تحديد قيمة المصفوفة التالية:

$X = [Xij] \quad (i , j = 1 , 2 , 3 , 4 , 5)$

إن عناصرها تحقق الشروط التالية:

قيمة X_{ij} ← أما (0) أو (1)

$$\sum_{i=1}^{5} X_{ij} = 1 \qquad (j = 1 , 2 , 3 , 4 , 5)$$

$$\sum_{j=1}^{5} X_{ij} = 1 \qquad (i = 1 , 2 , 3 , 4 , 5)$$

والتي تجعل من قيمة دالة الهدف التالية أقل ما يمكن:

$$Z = \sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} C_{ij} \,.\, X_{ij} \longrightarrow Min.$$

حيث أن C_{ij} هي عناصر مصفوفة التكاليف C.

في المشكلة قيد الدرس، إن مصفوفة النقل هي كما يلي:

X_{ij} = (1) يعني أن موقع العمل A_i يجهز المواد الأولية نصف الجاهزة إلى مركز الاستلام B_j.
(0) يعني أن موقع العمل A_i يجهز المواد الأولية نصف الجاهزة إلى مركز الاستلام B_j.

في المصفوفة C يتم إيجاد صفر واحد على الأقل في أي صف وأي عمود كالآتي:

$$\overset{0}{C}=\begin{bmatrix} 12 & 9.5 & 3.5 & 0 & 6.5 \\ 11 & 11.5 & 5.5 & 0 & 5.5 \\ 6.5 & 10 & 9 & 5.5 & 0 \\ 0 & 3.5 & 9.5 & 13 & 8.5 \\ 4.5 & 1 & 0 & 3.5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overset{1}{C}=\begin{bmatrix} 12 & 8.5 & 3.5 & 0 & 6.5 \\ 11 & 10.5 & 5.5 & 0 & 5.5 \\ 6.5 & 9 & 9 & 5.5 & 0 \\ 0 & 2.5 & 9.5 & 13 & 8.5 \\ 4.5 & 0 & 0 & 3.5 & 9 \end{bmatrix}$$

في المصفوفة $\overset{1}{C}$ يتم تحديد الأصفار المستقلة وكما يلي:

$$\overset{1}{C}=\begin{bmatrix} 12 & 8.5 & 3.5 & [0] & 6.5 \\ 11 & 10.5 & 5.5 & \mathbf{0} & 5.5 \\ 6.5 & 9 & 9 & 5.5 & [0] \\ [0] & 2.5 & 9.5 & 13 & 8.5 \\ 4.5 & [0] & \mathbf{0} & 3.5 & 9 \end{bmatrix}$$

القاعدة هي أن الصفر المستقل يقع في الصف أو العمـود، وأن وجـود صـفر آخر، يتطلب الأمر شطبه، ونتيجة لذلك فإن المصفوفة أعلاه تحوي أربعة أصفار مستقلة. ولما كان هناك خمسة مسارات لازمة لنقل المواد الأولية نصـف الجـاهزة (وذلك طبقاً للقيم الصفرية) لذلك لا يوجد حل . لـذلك يقتضي ـ الأمـر إيجـاد صفر مستقل خامس. وبناء على ذلك يتطلـب الأمـر اللجـوء إلى اجـرآت الحـل الواردة في المخطط الانسيابي الموضحة بالشكل (4–4) من الفصل السابق، علـماً بأن المطلوب هو تحديد صف واحد يتم فيه النقل ويهمل تحديد العمود الذي فيه لأن المفروض بموجب هذه المشكلة تحديد أقل عدد ممكن من المسـارات، ويـتم شطب الصف والعمود غير المحدد في المصفوفة $\overset{1}{C}$.

وبعد ذلك يتم طرح العنصر الأقل قيمة غير المشطوب من بقية العناصر غـير المشطوبة إضافة إلى العناصر المشطوبة مرتين نحصل على ما يلي:

$$\overset{2}{C}=\begin{bmatrix} 8.5 & 5 & 0 & 0 & 3 \\ 7.5 & 7 & 2 & 0 & 2 \\ 6.5 & 9 & 9 & 9 & 0 \\ 0 & 2.5 & 9.5 & 16.5 & 8.1 \\ 4.5 & 0 & 0 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

في المصفوفة $\overset{2}{C}$ يتم تحديد الأصفار المستقلة وكما يلي:

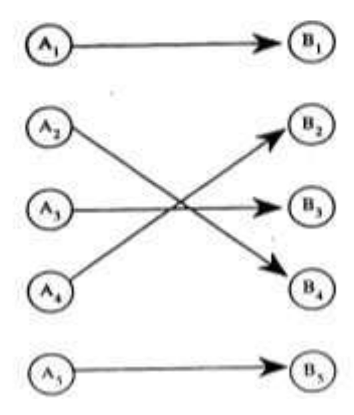
$$C^{2} = \begin{pmatrix} 8.5 & 5 & [0] & 0 & 3 \\ 7.5 & 7 & 2 & [0] & 2 \\ 6.5 & 9 & 9 & 9 & [0] \\ [0] & 2.5 & 9.5 & 16.5 & 8.1 \\ 4.5 & [0] & 0 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

في المصفوفة أعلاه يوجد خمسة قيم صفرية مستقلة [0]، وهو يعنـي أن هنـاك حـل. الخطـوة التاليـة هـي تخصـيص وسـيلة نقـل $X_{ij} = 1$ وذلـك في عنـاصر المصفوفة (0) الأصفار المستقلة، وبقية العناصر يكـون فيـه $X_{ij} = 0$ وبنـاء عـلى ذلك نحصل على ما يلي:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

إن خطة التخصيص التي بموجبها تكون التكـاليف الكليـة أقـل مـا يمكـن تتضح من خلال المصفوفة أعلاه، هي كالآتي:

الشكل رقم (5-10) المسارات التي توضح خطة التخصيص



إن دالة الهدف التي تعبر عن المشكلة هي كما يلي:

$Z = 9 + 5 + 5.5 + 4.5 + 9.5 = 33.5$ وحدة نقدية

مشكلة رقم (4): المنظمة الإنتاجية A تملك خمسة مواقع إنتاجية هي A_5 , A_4 , A_3 , A_2 , A_1 ترغب في نقل بضاعة من هذه المواقع إلى خمسة مخازن متوزعة في مناطق جغرافية مختلفة وهي B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , B_5 إن تكاليف نقل البضاعة المذكورة هي كما يلي:

C =	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	33	32	29	17	28
A_2	30	31	31	21	34
A_3	36	27	22	32	26
A_4	25	26	33	22	28
A_5	31	34	33	40	32

المطلوب: طلبت المنظمة من إدارة التسويق والنقل دراسة المشكلة المذكورة لوضع خطة النقل بحيث أن تكاليف النقل تكون أقل ما يمكن.

الحل: إن لحل المشكلة يكون من خلال تحديد قيمة المصفوفة.

$X = [Xij]$ (, 2 , 3 , 4 , 5 1 : حيث أن)

حيث أن:

X_{ij} (1) يتم نقل بضاعة من A_i إلى B_i

يتم تحويل المصفوفة C إلى المصفوفة $\overset{1}{C}$.

$$\overset{1}{C}=\begin{bmatrix} 6 & 12 & 12 & 0 & 10 \\ 9 & 7 & 10 & 0 & 12 \\ 14 & 2 & 0 & 10 & 3 \\ 3 & 1 & 11 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

في المصفوفة $\overset{1}{C}$ يتم تحديد الأصفار المستقلة وكما يلي:

$$\overset{1}{C}=\begin{pmatrix} 6 & 12 & 12 & [0] & 10 \\ 9 & 7 & 10 & 0 & 12 \\ 14 & 2 & [0] & 10 & 3 \\ 3 & 1 & 11 & [0] & 5 \\ [0] & 0 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

بالاعتماد على المصفوفة أعلاه لا يمكن الحصول على حل، إذ أن عدد الأصفار المستقلة يساوي ثلاثة في حين أن عدد المسارات (عد المصفوف أو عدد الأعمدة) هي خمس، لذلك يتم تعليم الصفوف التي لا يوجد فيها أصفار مستقلة، ومن ثم الأعمدة المشتركة معها بقيم صفرية وذلك طبقاً للمخطط الانسيابي الموضح بالشكل (4-4) في الفصل السابق وذلك كما يلي:

$$\overset{1}{C}=\begin{bmatrix} 6 & 12 & 12 & [0] & 10 \\ 19 & 7 & 10 & 0 & 12 \\ 14 & 2 & [0] & 10 & 3 \\ 3 & 1 & 11 & 0 & 5 \\ [0] & 0 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ * \\ \\ * \\ * \end{matrix}$$

يتم شطب الصفوف والأعمدة غير المحددة وذلك كما يلي:

$$\overset{1}{C}=\begin{bmatrix} 6 & 12 & 12 & 0 & 10 \\ 9 & 7 & 10 & 0 & 12 \\ 14 & 2 & 0 & 10 & 3 \\ 3 & 1 & 11 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

يتم طرح العنصر الأقل قيمة من بقيمة العناصر الغير مشطوبة وتضاف إلى العنصر المشطوب مرتين، عندها يتم الحصول على المصفوفة $\overset{2}{C}$ وذلك كالآتي:

$$\overset{2}{C}=\begin{bmatrix} 5 & 11 & 11 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 9 & 0 & 11 \\ 14 & 2 & 0 & 11 & 3 \\ 2 & 0 & 10 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة $\overset{2}{C}$ تحوي الأصفار المستقلة التالية:

$$\overset{2}{C}=\begin{bmatrix} 5 & 11 & 11 & [0] & 9 \\ 8 & 6 & 9 & 0 & 11 \\ 14 & 2 & [0] & 11 & 3 \\ 2 & [0] & 10 & 0 & 4 \\ [0] & 0 & 2 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفة أعلاه لا تعطي الحل المطلوب لأن عـدد الأصـفار المسـتقلة هـو أقل من عدد المسارات (أقل من عدد المصفوف أو الأعمدة) لذلك يتطلب الأمر إعادة تطبيق فكرة الشطب ووضع العلامات للحصول على المصـفوفة الجديـدة $\overset{3}{C}$ وذلك كما يلي:

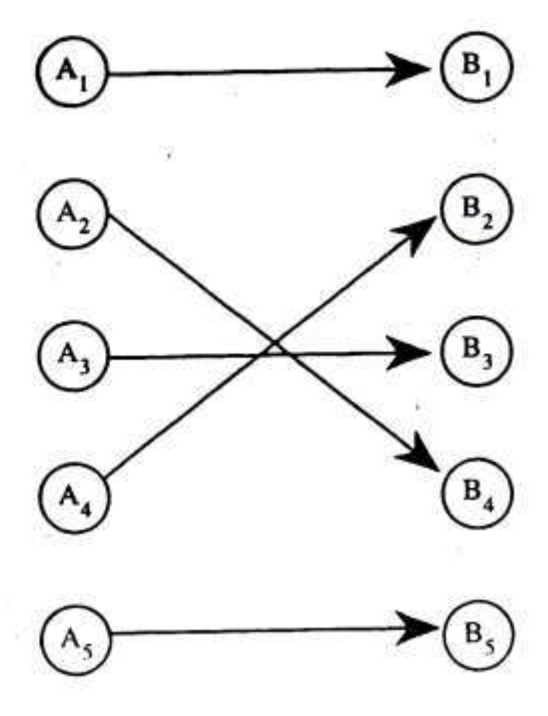
$$\overset{3}{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} [0] & 6 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & [0] & 6 \\ 14 & 2 & [0] & 16 & 3 \\ 2 & [0] & 10 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 15 & [0] \end{pmatrix}$$

المصفوفة = $\overset{3}{C}$ تحوي خمسة أصفار مستقلة، لذلك يتم تخصيص عمليـة نقـل أو تخصيص واسطة نقل (أي: $X_{ij} = 1$) ، في حين أن بقيمة العنـاصر لا يخصـص لها واسطة نقل (أي: $X_{ij} = 0$) ونتيجة لذلك، فإن مصفوفة التخصيص المثلى X هي كالآتي:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطة المثلى لتخصيص وسائل النقل تتضح مـن خـلال المسـارات الموضـحة بالشكل التالي:

الشكل رقم (5-11) المسارات التي توضح خطة التخصيص



إن دالة الهدف في ظل الخطة المثلى للتخصيص هي كما يلي:

$$Z = 23 + 21 + 22 + 26 + 32 = 124$$

أسئلة وتمارين الفصل الخامس

س1: ما المقصود بنماذج النقل المحورة؟

س2: ما هو تفسيرك لتطبيق نموذج تقليل عمليات النقل الفارغ؟

س3: في نموذج تخطيط الإنتاج الإضافي وتوزيعه، ما هو تفسيرك للعلاقة الرياضية التالية:

$$\sum_{i=1}^{m}(a_i+\Delta a_i)>\sum_{j=1}^{n}b_j$$

س4: في ورش صناعية (.III., II., I) يمكن أن يتم تصنيع خمسة من قطع الغيار المختلفة (.E ., D., C., B ., A) كما هو وارد في الجدول التالي:

الورق الصناعية	الإنتاج من قطع الغيار				
	A	B	C	D	E
I.	20	15	18	5	6
II.	22	20	10	5	3
III.	19	10	20	10	8
أقل عدد ممكن من قطع الغيار ينبغي إنتاجها	660	360	360	420	210
سعر قطع الغيار	20	15	18	70	110

حيث أن البيانات الواردة في الجدول تمثل:

1. الإنتاج في كل واحدة من الورش الصناعية عند إنتاج كل واحدة من قطع الغيار في خلال وجبة عمل واحدة.
2. أقل عدد مكن من قطع الغيار ينبغي إنتاجها.
3. سعر كل واحدة من قطع الغيار.

المطلوب: ما هي خطة تخصيص عملية تصنيع قطع الغيار بين الورش الصناعية، بحيث يتم بموجبها تعظيم مقدار الإنتاج الشهري مع العلم أن الورش الصناعية تعمل وفق وجبتي عمل (الشهر 23 يوم عمل)، هل أن كل ورش العمل سوف تعمل لكافة أيام الشهر.

النتائج النهائية:

$$X=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 20 & 0 & 26 \\ 20 & 18 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 38 & 8 \end{bmatrix} \quad F(X)=74260$$ دينار

س5: ثلاثي أنواع من المخارط الميكانيكية (O_3 , O_2 , O_3) يمكن أن تستخدم لإنتاج أربعة أنواع من المنتجات (E_4 , E_3 , E_2 , E_1) ووقت العمل اللازم موضح بالجدول التالي:

المخارط الميكانيكية	وقت العمل / بالدقائق			
	E_1	E_2	E_3	E_4
O_1	5	2	10	12
O_2	10	8	2	5
O_3	15	1	5	5

وقد عملت ما يلي:

1. الوقت المتاح بالنسبة للكل مخرطة هو:

⇐ O_1 2500 دقيقة

⇐ O_2 10000 دقيقة

⇐ O_3 24000 دقيقة

2. المطلوب إنتاجه من كل منتوج هو:

⇐ E_1 200 قطعة

$\Leftarrow$ E_2 800 قطعة

$\Leftarrow$ E_3 200 قطعة

$\Leftarrow$ E_4 600 قطعة

المطلوب: تخصيص وتوزيع المهام الإنتاجية بين المخارط الثلاث بحيث لا يتجاوز ذلك ما هو متوفر من وقت العمل للمكائن، مع تخصيص متطلبات خطة الإنتاج مع الأخذ بنظر الاعتبار تقليل وقت العمل الى أدنى مستوى ممكن.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 200 & 600 \\ 0 & 800 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F(X) = 5200 \text{ دينار}$$

س6: في أحد المعامل الإنتاجية يمكن أن يتم تصنيع ثلاثة منتجات W_3, W_2, W_1 وذلك باستخدام ثلاثة مكائن O_1 , O_2 , O_3.

الجدول التالي يوضح استهلاك الوقت للمكائن الثلاث وذلك لكل وحدة واحدة من الإنتاج وكذلك كلفة الوحدة الواحدة من المنتجات في ظل كل واحدة من المكائن وسعر بيع الوحدة الواحدة من المنتجات الثلاث:

كلفة الوحدة الواحدة			استهلاك الوقت			المكائن
W3	W2	W1	W3	W2	W1	
13	24	21	16	8	12	O_1
11	27	20	15	10	14	O_2
14	26	19	18	12	15	O_3
17	32	25	سعر المنتجات			

المطلوب: تخصيص عملية إنتاج المنتجات الثلاث على المكائن بحيث تكون الربح من عملية البيع يكون أعلى ما يمكن وذلك على افتراض:

1. أن الوقت المتاح بالنسبة لأي ماكنة يبلغ 480 دقيقة.
2. إن كل واحدة من المنتجات يفترض إنتاجية بحدود 20 قطعة.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 60 & 0 \\ 0 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 0 \end{bmatrix} \quad F(X) = 900 \text{ دينار}$$

س7: ما هو تفسيرك لأوجه الاختلاف بين مشكلة النقل ومشكلة التخصيص.

س8: ما المقصود في القيد الوارد بنموذج التخصيص $X_{ij} \begin{cases} =0 \\ =1 \end{cases}$

س9: في إحدى المصانع الإنتاجية يتم طرح ثلاثة أنواع من المنتجات C, B. A وذلك باستخدام ثلاثة أنواع من المواد الأولية. إن استهلاك هذه المواد الأولية محسوباً بالكيلو غرام لكل 1000 قطعة إنتاج يتضح من خلال الجدول التالي:

المنتجات	المواد الأولية لكل 1000 قطعة		
	I	II	III
A	10	80	20
B	20	40	40
C	70	30	20

وقد علمت أن المطلوب هو إنتاج:

⇐ A 200 ألف قطعة

⇐ B 160 ألف قطعة

⇐ C 210 ألف قطعة

وقد أشار المهندسين المسؤوليين عن العملية الإنتاجية، إن هكذا خطة إنتاج تستلزم توفير أو شراء:

- على الأقل 2100 كغم من المادة الأولية I.
- على الأقل 2400 كغم من المادة الأولية II.

المطلوب: تحديد خطة شراء المواد الأولية بحيث تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن علماً بأن سعر المواد الأولية هو 6 ، 8 ، 11 على التوالي.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 200 & 0 & 0 \\ 5 & 60 & 95 \\ 0 & 0 & 210 \end{bmatrix} \quad F(X) = 900 \text{ دينار}$$

س10: ثلاثة أنواع من المكائن قيم عليها صناعة أربعة أنواع من المنتجات.

الجدول التالي يتضمن بيانات تتعلق بمقدار استغلال الوقت لكل واحدة من المنتجات:

المكائن	المنتجات				المتوفر من المكائن
	I	II	III	IV	
A	25	15	16	20	10
B	30	10	24	25	8
C	24	18	25	27.5	15
المطلوب	220	90	146	220	

المطلوب: بيان الكيفية التي بموجبها تتم عملية التخصيص بحيث تكون التكاليف اليومية لاستغلال المكائن هو أقل ما يمكن: وقد علمت أن:

- تكاليف استخدام 1 ماكنة من النوع A $\Leftarrow$ 190 دينار
- تكاليف استخدام 1 ماكنة من النوع B $\Leftarrow$ 130 دينار
- تكاليف استخدام 1 ماكنة من النوع C $\Leftarrow$ 280 دينار

أي نوع من المكائن لا يكون مستغل بالكامل.

النتائج النهائية:

$$X = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad F(X) = 5740 \text{ دينار}$$

يبقى 5 مكائن من النوع C غير مستغلة

الفصل السادس
البرمجة الديناميكية
في اتخاذ القرار الأمثل

6

الفصل السادس

البرمجة الديناميكية Dinamec Programming
في اتخاذ القرار الأمثل

1.6. البرمجة الديناميكية وصيغتها الرياضية

إن الصيغة الأساسية التي تميز البرمجة الديناميكية هو دخول عنصر الزمن في النموذج الرياضي للمشكلة بخلاف ما هو عليه الحال في البرمجة الخطية أو الأنواع الأخرى من نماذج البرمجة الرياضية ذات الصيغ الثابتة Static Models. أي بموجب هذا الأسلوب يتمكن متخذ القرار من القيام بالتخطيط الأمثل للعمليات القابلة للتغيير والتعديل بمرور الزمن. أو بعبارة أخرى إن البرمجة الديناميكية أسلوب يستخدم في معالجة المشاكل طوال مرحلة التنفيذ لعمليات حل هذه المشاكل. ومن أجل التوصل إلى الأسلوب الأمثل في التغيير والتعديل المطلوب للمشكلة في إطار البرمجة الديناميكية (والذي يؤدي إلى سلسلة من القرارات) يتم تقسيم المشكلة إلى عدد من المراحل المتتالية، علماً بأن بعض هذه المشاكل قد تكون مقسمة بطبيعتها بينما ينبغي تقسيم البعض الآخر.

لتوضيح فكرة البرمجة الديناميكية نعتمد أحد المشكلات المستمدة من الواقع العملي التي هي بطبيعتها مقسمة إلى عدد من المراحل. إن هذه المشكلة تستند إلى عدد من النشاطات الصناعية التي تتكون من N من المراحل المتسلسلة. لذلك فإن في بداية المرحلة n (حيث أن: $n = 1 , 2 , \ldots , N$) يتطلب الأمر تحديد قيمة

المتغير الأساسي X_n. هذا إضافة إلى أن سلسلة المتغيرات الأساسية $X_1 ,....X_2,......X_n,...... X_N$ للنشاط الصناعي ككل ينبغي أن يتم اختيارها بالطريقة التي تجعل المعايير الناجمة من تحديد الدالة $F (X_1 ,....X_2,......X_n,...... X_N)$ تبلغ القيمة القصوى أو الدنيا لها وذلك حسب طبيعة المشكلة. علماً بأن عند اتخاذ قرار بخصوص إحدى المراحل، لا تهمل المراحل الأخرى بل تؤخذ بنظر الاعتبار أيضاً.

وعلى أساس ما تقدم يمكن أن نستنتج بأن في ظل البرمجة الديناميكية يجري البحث عن الحل الأمثل على عدة مراحل حسب تسلسل النشاط، حيث في كل مرحلة يجري تحديد الحل الأمثل. كما أن القرار المتخذ في أحد مراحل النشاط له ارتباط وثيق بالقرار المتخذ في المراحل الأخرى.

إن القاعدة الأساسية المعتمدة في إيجاد الحل الأمثل على أساس نموذج البرمجة الديناميكية المستخدم في معالجة نظام معين، هي ما يلي:

بغض النظر عن حالة النظام الابتدائية والقرار الابتدائي، فإن القرارات اللاحقة ينبغي أن تمثل السياسة المثلى استناداً إلى الحالة الناجمة عن القرار الابتدائي ولو فرضنا ما يلي:

$S_t \leftarrow$ حالة نظام المشكلة في اللحظة t (الموقف في الحالة السابقة)

$S_{t+1} \leftarrow$ حالة نظام المشكلة في اللحظة t + 1 (الموقف الحالي)

$d_{t+1} \leftarrow$ القرار المتخذ في اللحظة t + 1 (القرار الحالي)

$F \leftarrow$ دالة الهدف

فإن القاعدة أعلاه يمكن التعبير عنها رياضياً كالآتي[1]:

$$S_{t+1} = F\ (S_t\ ,\ d_{t+1})$$

أي أن حالة النظام في اللحظة 1 + t هي عبارة عن دالـة الحالـة النظـام في الحالـة السابقة (أو اللحظة الابتدائية) مع القرار المتخذ في اللحظة 1 + t أو اللحظة الحالية.

ولتقريب الصورة أكثر إلى ذهن القارئ نفـرض أن نظـام المشـكلة يتمثـل في اتخاذ قرار معين بخصوص توزيع مستلزمات الإنتاج الأساسية التي مقـدارها a وحدة وذلك بين N من النشـاطات ($n = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots,\ N$) فـإن مـع كـل n نشـاط هناك دالة نتائج (هدف) مرتبط به، ويرمز للدالة المذكورة التي ينبغي أن تقودنـا إلى الحل الأمثل:

$g_n\ (X_n)$

حيث أن:

$X_n \leftarrow$ كمية المستلزمات الأساسية التي توزع على النشاطات.

استناداً إلى ما تقدم يمكن صياغة نموذج رياضي ديناميكي خـاص بـالتوزيع الأمثل للمستلزمات الأساسية للإنتاج، وذلك كالآتي:

المطلوب: تحديد قيم موجبـة للمتغـيرات الأساسـية $X_1\ ,\ X_2\ \ldots\ldots,\ X_n,\ \ldots.,\ X_N$ (حيث أن: X_n هي كمية المسـتلزمات الأساسـية المحـددة للنشـاط n) التـي تعظم دالة مجموع النتائج (الأهداف) للنشاطات كافة ($n = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots,\ N$).

([1]) W. SADOWSKI.. op.cit, pp.281

أي أن:

$$F(X_1, X_2, ..., X_n, ..., X_N) = g_1(X_1) + g_2(X_2) + ...+ g_n(X_n)+... + g_N(X_N)$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$X_1 + X_2 + ... + X_n + ... X_N = a$$

حيث من الشروط المذكورة يمكن أن نستنتج أن الكمية المتوفرة من المستلزمات الأساسية محددة.

2.6. أنواع نماذج البرمجة الديناميكية المستخدمة في اتخاذ القرار الأمثل لمعالجة المشكلات الإدارية المختلفة

إن نماذج البرمجة الديناميكية تتنوع باختلاف المشاكل التي يجري معالجتها، سواء كان ذلك في نطاق المنظمة أو في نطاق أوسع من ذلك أي المؤسسة أو الاقتصاد الوطني ككل وعلى أساس نموذج البرمجة الديناميكية يجري اتخاذ القرار الأمثل في معالجة المشكلات في منظمات الأعمال الإنتاجية والخدمية التي يجري تقسيمها إلى مراحل أو أنها بالأصل مقسمة إلى عدد من المراحل وذلك حسب طبيعة المشكلة وخصائصها الذاتية.

وهنالك مشكلات كثيرة يجري معالجتها باستخدام البرمجة الديناميكية. فيما يلي عرض لأهمها مع بيان كيفية صياغة النموذج الرياضي في ظل البيانات المتوفرة عن المشكلة:

1) التوزيع الأمثل للتخصيصات الاستثمارية بين المنظمات المرتبط بالمؤسسة الواحدة.

2) تحديد الحجم الأمثل من الإنتاج لأقسام وفروع المنظمة الواحدة.

3) الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج بوجود دالة هدف مضاعفة بمقدار معين.

4) توزيع المبالغ النقدية بين عمليات الصيانة.

5) توزيع الموارد المختلفة.

وأدناه توضيح لكل واحدة في هذه المشاكل.

1.2.6. نموذج التوزيع الأمثل للتخصيصات الاستثمارية بين منظمات الأعمال المرتبطة بالمؤسسة الواحدة.

إن بعض المؤسسات الكبيرة يكون من مسؤولياتها الإشراف والتوجيه للنشاطات الإدارية للمنظمات التابعة لها. ويتضمن ذلك توزيع التخصيصات المالية بين هذه المنظمات بالمقدار الذي يجعلها تحقق الهدف المطلوب الوصول إليه. ويكون مقدار الربح المتحقق في هذه الحالة هو مؤشر الأمثلية الذي على أساسه يتم تحديد مدى نجاح المنظمة في استغلال التخصيصات المالية التي تم الحصول عليها من المؤسسة. إن فكرة هذا النموذج تنطبق أيضاً على المنظمة الكبيرة التي تتألف من عدد كبير الفروع والأقسام كما هو وارد في المشكلة التالية:

مشكلة رقم (1): منظمة أعمال صناعية كبيرة تتوزع نشاطاتها بين عدد من الفروع والأقسام عددها N. إن الربح المتحقق في الفرع أو القسم i (حيث أن: $i = 1, 2, \ldots, N$) يتوقف على حجم الموارد والتخصيصات

الحالية الموزعة. إن هذه العلاقة يمكن عرضها من خلال الدالة التالية:

. g_i (i = 1 , 2 , …., N)

إن وضع صيغة رياضية على أساسها يتم التوزيع الأمثل للموارد والتخصيصات المالية بين فروع وأقسام المنظمة يتطلب الأمر تحديد مؤشر لقياس فعالية التوزيع. وأهم المؤشرات في هذه الحالة هو مجموع الأرباح المتحققة في كافة الفروع والأقسام التابعة للمنظمة.

الحل: في البداية يتم وضع الفرضيات التالية:

X_i (i = 1 , 2, …, N) حجم التخصيصات المالية الموزعة بين (i) في الأقسام والفروع g_i (X_i) (i = 1 , 2, …., N) : الربح المتحقق في (i) في الأقسام والفروع.

إن مجموع الأرباح المتحققة في N من الأقسام والفروع يحسب كالآتي:

$$F(X_1, X_2, X_3, …., X_N) = g_1(X_1)+g_2(X_2)+g_3(X_3)+….+g_n(X_N)$$

الشروط الواجب أخذها بعين الاعتبار تتعلق بالمتغيرات الأساسية في المشكلة $X_1, X_2, X_3, …., X_4$ التي ينبغي أن تحقق العلاقة التالية:

$$X_1 + X_2 + X_3 + …. + X_N = C$$

علماً بأن $X_i \geq 0$ وذلك لكافة قيم i (حيث أن: i = 1 , 2 , …., N)

إن العلاقات الرياضية أعلاه هي بمثابة النموذج الرياضي للبرمجة الديناميكية.

وبهدف حل النموذج المذكور يتطلب الأمر توزيع التخصيصات المالية بين الأقسام والفروع، كما يلي:

المرحلة الأولى: يحدد مقدار معين من التخصيصات المالية للأقسام والفروع التي عددها ← N

المرحلة التالية: يحدد مقدار آخر من التخصيصات المالية للأقسام والفروع التي عددها ← N-1

المرحلة اللاحقة: يحدد مقدار آخر من التخصيصات المالية للأقسام والفروع التي عددها ← N-2

وهكذا بالنسبة لبقية الأقسام والفروع بحيث في نهاية الأمر تتكون مراحل متسلسلة ومتحركة يتم بمقتضاها توزيع التخصيصات المالية، بحيث لو تم تحديد تخصيصات مالية للأقسام والفروع التي عددها N، فإن الربح الذي سوف يتحقق يتم حسابه وفقاً للدالة $g_N(X_N)$ التي تحقق الشرط التالي:

$$0 \leq X_N \leq a_N$$

وذلك على افتراض أن: $a_N = C$

بعد أن تستلم الأقسام والفروع N المقدار X_N من التخصيصات المالية المتوفرة بالمقدار، a_N فإن المتبقي من هذه التخصيصات يحسب كما يلي:

$$a_N - X_N$$

ويمكن التعبير عن التخصيصات المالية المتبقية من خلال العلاقة التالية:

$$a_N - X_N = a_{N-1}$$

حيث أن: a_{N-1} ← : مقدار التخصيصات المالية الواجب توزيعها بين N-1 من الأقسام والفروع، علماً بأن:

$a_N - X_N$ ← : بقية التخصيصات المالية

إن مقدار التخصيصات المالية a_{N-1} الواجب توزيعها بين N-1 من الأقسام والفروع. ينبغي توزيعها بالطريقة التي تجعل الربح المتحقق في الأقسام والفروع N-1 أعلى ما يمكن.

لنفرض أن أعلى ربح ممكن أن يتحقق من البقية الباقية من الأقسام والفروع N-1 هو كالآتي:

$$F_{N-1}\ (a_{n-1})$$

إن هذه الدالة يمكن أن تكتب بالصيغة التالية:

$$F_{N-1}\ (a_{N-1})\ F = {}_{N-1}\ (a_N - X_N)$$

وهي دالة تعبير عن الربح الممكن تحقيقه من البقية الباقية من الأقسام والفروعN-1 . ولو تم مراجعة ما تم توزيعه من مبالغ للأقسام N لا تضح أنه يبلغ X_N من التخصيصات المالية فإن الربح المتحقق في هذه الحالة يحسب كالآتي:

$$g_N\ (X_N)$$

ولو تقرر حساب الربح الكلي من N في الأقسام والفروع، فإن ذلك يتم حسابه من الصيغة التالية:

$$g_N\ (X_N) + F_{N-1}\ \ (a_N - X_N)$$

إن الحصة النقدية المثلى X_N المطلوب توزيعها هي تلك الحصة التي تجعل دالة الهدف الواردة أعلاه أعلى ما يمكن.

إن دالة الهدف (أعلى مبلغ للأرباح) لـ N في الأقسام والفروع يمكـن كتابتهـا بالصيغة التالية:

$$F_N (a_N)= Max \{g_N (X_N) + F_{N-1} (a_N-X_N) \}$$
$$0\leq X_N \leq a_N$$

ونفس الشيء بالنسبة للدالة السابقة $F_{N-1} (a_N-1)$

$$F_{N-1} (a_{N-1})= Max \{g_{N-1} (X_{N-1}) + F_{N-2} (a_{N-1}-X_{N-1}) \}$$
$$0\leq X_{N-1} \leq a_{N-1}$$

وكذلك بالنسبة للدالة المكتوبة بالصيغة $F_{N-2} (a_{N-2})$ حيث:

$$F_{N-2} (a_{N-2})= Max \{g_{N-1} (X_{N-2}) + F_{N-2} (a_{N-2}-X_{N-2}) \}$$
$$0\leq X_{N-2} \leq a_{N-1}$$

1) عندما يكون المطلوب X_1 :

$$F_1 (a_1) = Max \{g_1 (X_1)\}$$
$$X_1 \leq a_1$$

2) عندما يكون المطلوب X_2 :

$$F_2 (a_2) = Max \{g_1 (X_2) + F_1 (a_1)\}$$
$$0\leq X_2 \leq a_2$$

وذلـك لأن $a_1 = a_2 - X_2$ ، حيـث أن العلاقـة أعـلاه، بالأصـل يفـترض أن تكون مكتوبة كما يلي:

$$F_2 (a_2)= Max \{g_2 (X_2) + F_1 (a_2-X_2) \}$$
$$0\leq X_2 \leq a_2$$

3) عندما يكون المطلوب X_3:

$$F_3\,(a_3)= Max\,\{g_3\ \ (X_3) + F_2\,(a)\ \}$$
$$0 \leq X_3 \leq a_3$$
$$= Max\,\{g_3) + F_2\,(a_3 - X_3)\}$$
$$0 \leq X_3 \leq a_3$$

حيث أن $a_2 = a_3 - X_3$

4) عندما يكون المطلوب X_{N-1}:

$$F_{N-1}\,(a_{N-1})= Max\,\{g_{N-1}\ \ (X_{N-1}) + F_{N-2}\,(a_{N-2})\ \}$$
$$0 \leq X_N \leq a_N$$
$$= Max\,\{g_N\,(X_N) + F_{N-2}\,(a_{N-1} - X_{N-1})\}$$
$$0 \leq X_{N-1} \leq a_{N-1}$$

وذلك لأن $a_{N-2} = a_{N-1} - X_{N-1}$

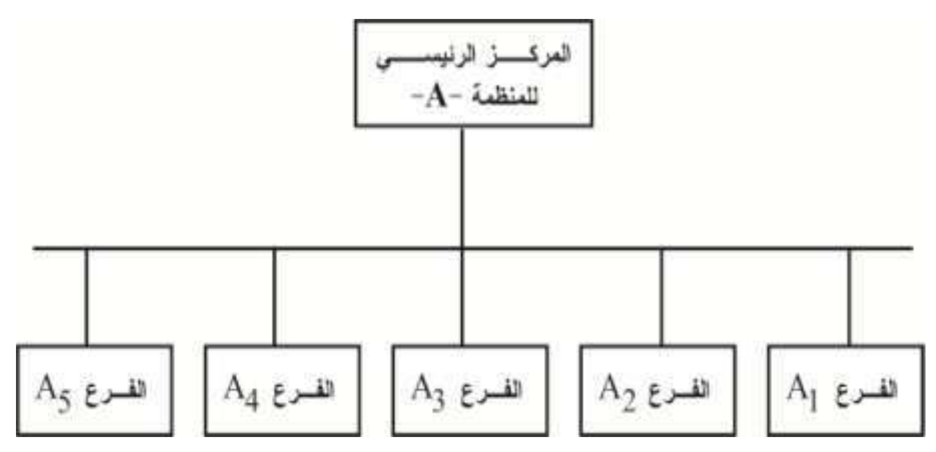
5) عندما يكون المطلوب X_N:

$$F_N\,(a_N)= Max\,\{g_N\ \ (X_N) + F_{N-4}\,(a_{N-2})\ \}$$
$$0 \leq X_N \leq a_N$$
$$= Max\,\{g_N\,(X_N) + F_{N-`}\,(a_N - X_N)\}$$
$$0 \leq X_N \leq a_N$$

وذلك لأن $a_{N-1} = a_N - X_N$

المشكلة رقم (2): إحدى منظمات الأعمال الصناعية المتخصصة بإنتاج نوع معين من السلع، يرتبط بها خمسة فروع هي على التوالي A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 تقوم بإنتاج نفس الأنواع من السلع. إن هذه الفروع ترتبط بالمركز الرئيسي للمنظمة كما هو واضح في الشكل التالي:

الشكل رقم (6-1) علاقة المركز الرئيسي للمنظمة بالفروع



هنـاك أربعـة أنـواع مـن بـدائل الخطـط أو الفـرص الاسـتثمارية المقترحـة مـن قبـل المركـز الرئيسيـ. وإن الاحتياجـات الماليـة اللازمـة لتحقيـق الخطط (الفرص) الاستثمارية المذكورة تبلغ عـلى التـوالي 200 ، 150 ، 100 ، 50 وحدة نقدية.

إن الاحتياجات الاستثمارية لكل فرع يمكن أن تصـل إلى 0، 50، 100، 150، 200 وحدة نقدية. وأن الزيادة السنوية المتحققة في حجم الإنتاج لكل منظمة تبعاً لقيمة الاحتياجات الاستثمارية تتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (6-1) بيانات المشكلة

البدائل (الفرص) الاستثمارية	قيمة الاحتياجات الاستثمارية	قيمة الزيادة السنوية المتحققة في حجم الإنتاج لكل فرع من المنظمة				
		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
	0	0	0	0	0	0
البديل رقم (1)	50	25	30	36	28	32
البديل رقم (2)	100	70	70	64	56	80
البديل رقم (3)	150	100	90	95	110	105
البديل رقم (4)	200	140	122	130	146	135

استنادا إلى المعلومات الواردة في الجدول (6-1) عندما تكون النفقات الاستثمارية 100 وحدة نقدية، فإن الزيادة السنوية المتحققة في حجم الإنتاج تبلغ قيمتها لفروع المنظمة $A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5$ هي على التوالي 56، 64، 70، 70، 80 وحدة نقدية.

المطلوب: طلبت إدارة المنظمة A من الإدارة المالية وضع خطة مثلى لتقسيم النفقات الاستثمارية طبقاً للبدائل والفرص الاستثمارية المذكورة، مما يحقق القيمة المثلى لمجموع الزيادات السنوية في الإنتاج لفروع المنظمة الخمسة.

الحل: لحل هذه المشكلة يتم وضع الافتراضات التالية:

X_i $(i = 1 , 2 , 3 , 4 , 5)$: حجم النفقات الاستثمارية المطلوبة للفرع (i)

$g_i (X_i)$ $(i = 1 , 2 , 3 , 4 , 5)$: مقدار الزيادة السنوية في الإنتاج الحاصلة في الفرع (i) بفعل النفقات الرأسمالية (X_i).

القيمة الكلية للزيادات السنوية في الإنتاج للفروع $A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5$ تحسب كما يلي:

$$F(X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5)= g_1(X_1)+ g_2 (X_2)+g_3 (X_3)+g_4 (X_4)+ g_5 (X_5)$$

إن المتغيرات الأساسية $X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5$ يجب أن تحقق الشرط التالي[1]:

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 = a_5$$

---

[1] إن المتغير a5 يمكن أن يأخذ أحد القيم 50 ، 100 ، أو 200 انظر الجدول (6-1).

حيث أن

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$, $X_4 \geq 0$, $X_5 \geq 0$

a_i(i = 1 , 2 , 3 , 4 , 5) i القيمة الكلية لحجم النفقات الاستثمارية المحسوبة للفرع (i).

مقدار تحديد X_5 من النفقات الاستثمارية للفرع A_5، فإن مقابل ذلك حصول زيادة سنوية في الإنتاج مقدارها $g_5 (X_5)$ علماً بأن X_5 ينبغي أن تحقق الشرط التالي:

$0 \leq X_5 \leq a_5$

عليه فإن المتبقي من النفقات الاستثمارية لبقية فروع المنظمة تحسب كما يلي:

$a_4 = a_5 - X_5$

مقدار المتبقي من النفقات الاستثمارية a_4 بين الفروع A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_4 بالشكل الذي يؤدي إلى حصول الزيادة الكلية المثلى للإنتاج.

إن الزيادة الكلية المثلى في الإنتاج المتأتي من الفروع A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_4 المتحققة على أساس a_4 من النفقات الاستثمارية المتبقية تحسب من العلاقة التالية:

$$F_4 (a_4) = F_4 (a_5 - X_5)$$

حيث أن:

$0 \leq X_5 \leq a_5$

استناداً إلى الصيغة الأساسية للبرمجة الديناميكية الموضحة في بداية الفصل، أن قيمة الزيادة السنوية في الإنتاج لكافة الفروع. (أي: A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5) تحسب من العلاقة التالية:

$$F_5 (a_5) = Max \{g_5 (X_5) + F_4 (a_5 - X_5)\}$$
$$0 \leq X_5 \leq a_5$$

أما بالنسبة للمقدار الأقصى لمجموع الزيادات السنوية في الإنتاج بالنسبة للفروع (A_1 , A_2 , A_3 , A_4) تحسب كالآتي:

$$F_4 (a_4) = Max \{g_4 (X_4) + F_3 (a_4 - X_4)\}$$
$$0 \leq X_4 \leq a_4$$

وبالنسبة للفروع تحسب كالآتي: (A_1 , A_2 , A_3):

$$F_3 (a_3) = Max \{g_3 (X_3) + F_2 (a_3 - X_3)\}$$
$$0 \leq X_3 \leq a$$

وهكذا بالنسبة للفروع (A_1 , A_2)

طبقاً لمبدأ الحل الأمثل فإن بالإمكان الحصول على الدوال التالية:

(1) بالنسبة للمتغير X_1 ⟵ $F_1 (a_1) = Max \{ g_1 (X_1) \}$

$$X_1 = a_1$$

(2) بالنسبة للمتغير X_2 ⟵ $F_2 (a_2) = Max \{ g_2 (X_2)+ F_1 (a_1) \}$

$$0 \leq X_2 \leq a_2$$
$$= Max\{g_2 (X_2) + F_1 (a_2 - X_2) \}$$
$$0 \leq X_2 = a_2$$

حيث أن: $a_1 = a_2 - X_2$

(3) بالنسبة للمتغير X_3 ⟵ $F_3 (a_3) = Max \{ g_3 (X_3)+ F_2 (a_2) \}$

$$0 \leq X_3 \leq a_3$$
$$= Max\{g_3 (X_2) + F_2 (a_3 - X_3) \}$$

حيث أن: $a_2 = a_3 - X_3$

(4) بالنسبة للمتغير X_4 ⟵ $F_5 (a_5) = Max \{ g_5 (X_5)+ F_4 (a_4) \}$

$$= Max\{g_5 (X_5) + F_4 (a_5 - X_5) \}$$

$0 \leq X_5 \leq a_5$

حيث أن: $a_4 = a_5 - X_5$

استناداً إلى علاقات الدوال أعلاه يتم حساب القيم المثلى للمتغيرات الأساسية X_i $(i = 1 , 2 , 3 , 4 , 5)$ كما يلي:

بالنسبة للمتغير X_1:

$$F_1 (a_1) = Max \{g_1 (X_1) \} = Max \{g_1 (a_1) \} = g_1 (a_1)$$

$$X_1 = a_1$$

حيث أن a_1 يمكن تأخذ أحد القيم 0150 , 50 ,100 , أو 200 وذلك كما في الجدول التالي:

جدول رقم (6-2)

$X_1 = a_1$	$g_1 (X_1) = F_1 (a_1)$
0	0
50	25
100	70
150	100
200	140

بالنسبة للمتغير X_2:

$$F_2 (a_2) = Max \{g_2 (X_2) \} + F_1 (a_1) \}$$

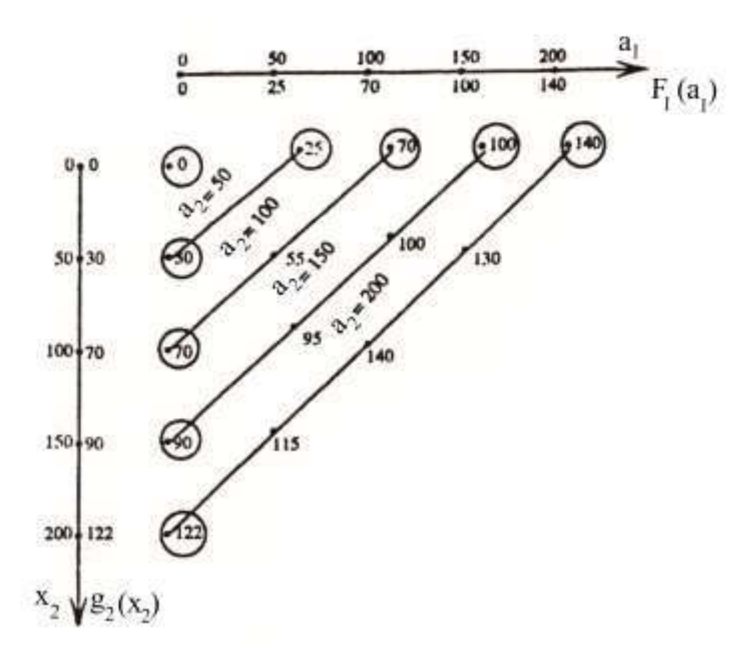
$0 \leq X_2 = a_2$

بعد ذلك يتم تحديد النقاط المناظرة للمتغيرات a_1, X_2 والتي تحقق الشرط التالي:

$$a_2 = a_1 + X_2$$

عملية حساب $F_2\ (a_2)$ تتضمن خلال الشكل البياني التالي:

الشكل رقم (6-2) حساب قيمة $F_2\ (a_2)$



أما بالنسبة لقيم المتغيرات a_1 , X_2 (حيث أن: $a_2 = a_1 + X_2$) فإنها تحسب من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (6-3)

$a_2 = a_1 + X_2$	$F_2\ (a_2)$	a_1	X_2
0	0	0	0
50	30	0	50
100	70	100	0
150	100	150	0
200	140	200	50

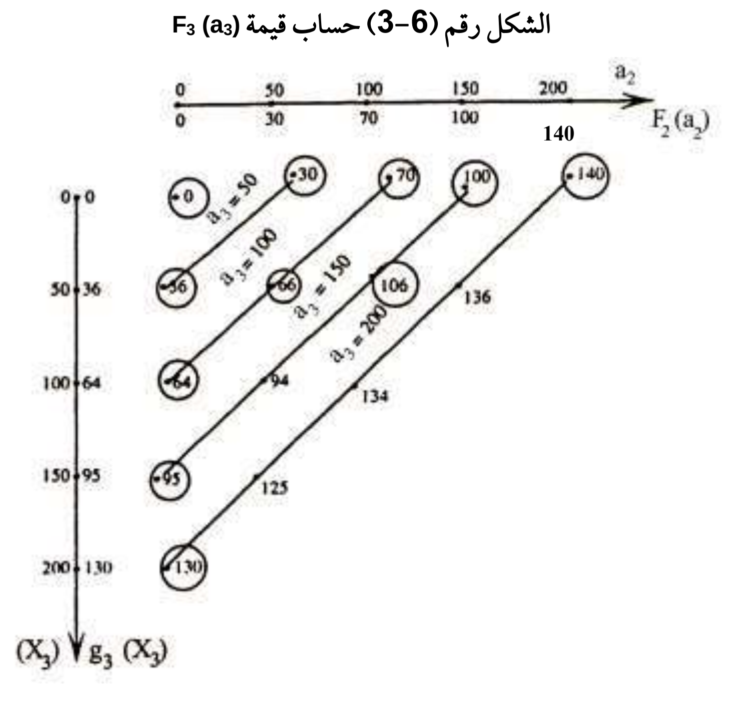
- بالنسبة للمتغير X_3:

$$F_3 \ (a_3) = Max \{g_3 (X_3) \} + F_3 (a_2) \}$$

$$0 \ \leq X_3 = a_3$$

يتم حساب قيمة F_3 (a_3) لكافة قيم a_3 على أساس الشكل التالي:

الشكل رقم (6-3) حساب قيمة F_3 (a_3)



أما بالنسبة للمتغيرات a_2 , X3 فيتم حسابها على أساس الجدول التالي:

جدول رقم (6-4)

$a_3 = a_2 + X_3$	F_3 (a_3)	a_2	X_3
0	0	0	0
50	30	0	50
100	70	100	0
150	100	150	50
200	140	200	50

- بالنسبة للمتغير X_4:

$$F_4 \ (a_4) = Max \{g_4 (X_4) \} + F_3 (a_3) \}$$
$$0 \ \leq X_4 = a_4$$

حيث أن: $a_4 = a_3 + X_4$

يتم حساب قيمة $F_4 (a_4)$ لكافة قيم a_4 وبنفس الطريقة بالنسبة للمتغيرات X_4 , a_3 فيتم حسابها على أساس الجدول التالي:

جدول رقم (6-5)

$a_4 = a_3 + X_4$	$F_4 (a_4)$	a_3	X_4
0	0	0	0
50	36	50	0
100	66	100	0
150	110	0	150
200	146	50	150

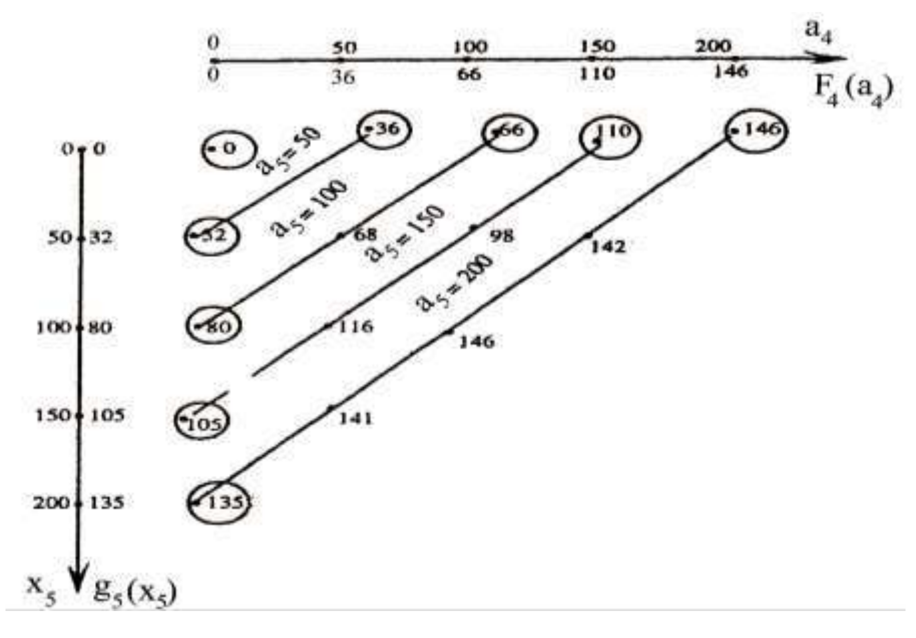
- بالنسبة للمتغير X_5:

$$F_5 \ (a_5) = Max \{g_5 (X_5) \} + F_4 (a_4) \}$$
$$0 \ \leq X_5 = a_5$$

حيث أن: $a_5 = a_4 + X_5$

يتم حساب قيمة $F_5 (a_5)$ لكافة قيم a_5 و على أساس الشكل التالي:

الشكل رقم (6-5) حساب قيمة $F_5(a_5)$



أما بالنسبة للمتغيرات a_4 , X_5 فيتم حسابها على أساس الجدول التالي:

جدول رقم (6-6)

$a_5 = a_4 + X_5$	$F_5(a_5)$	a_4	X_5
0	0	0	0
50	36	50	0
100	80	0	100
150	116	50	100
200	146	100	100

1- من الجدول (6-6) عندما تكون $a_5 = 200$ فإن:

$$a_4 = 100 , \quad X_5 = 100$$

2- من الجدول (6-5) عندما تكون $a_4 = 100$ فإن:

$a_3 = 50 , \quad X_4 = 150$

3- من الجدول (6-4) عندما تكون $a_3 = 100$ فإن:

$a_2 = 200 , \quad X_3 = 50$

4- من الجدول (6-3) عندما تكون $a_2 = 50$ فإن:

$a_1 = 200 , \quad X_2 = 50$

وأخيراً فإن : $X_1 = a_1 = 0$

وبناءاً على ما تقدم، عندما يكون: $a_5 = 200$ فإن قيم المتغيرات الأساسية تأخذ القيم التالية:

$X_1 = 0 , X_2 = 50 , X_3 = 50 , X_4 = 150 , X_5 = 100$

أما بالنسبة للقيمة المثلى للزيادة السنوية في الإنتاج فإنها تحسب كما يلي:

$F_5 (a_5) = 146$ وحدة نقدية

وبنفس الطريقة يتم تحديد قيم المتغيرات الأساسية عندما تكون قيم a_5 كما يلي:

$a_5 = 150 , a_5 = 100 , a_5 = 50 , a_5 = 0$

ويتم عرض النتائج النهائية للمشكلة من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (6-7)

a_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	$F_5 (a_5)$
0	0	0	0	0	0	0
50	0	50	50	0	0	36
100	0	0	0	0	100	80
150	0	0	50	150	100	116
200	0	50	50	150	100	146

استناداً إلى ما تقدم يتضح ما يلي:

إذا كانت قيمة النفقات الرأسمالية تبلغ 200 وحدة نقدية، فإن الفرع A_2 والفرع A_3 كل منهما يأخذ 50 وحدة نقدية والفرع A5 يأخذ القيمة 100 وحدة نقدية. ونتيجة لذلك سوف تكون القيمة القصوى لمجموع الزيادات السنوية لإنتاج 146 وحدة نقدية.

أما إذا كانت قيمة النفقات الرأسمالية 100 وحدة نقدية، فإن من الأفضل تخصيص هذه النفقات للفرع A_5، وهذا مما يؤدي إلى أن تصبح القيمة القصوى للزيادة السنوية للإنتاج 80 وحدة نقدية. وهكذا بالنسبة لبقية المؤشرات والأرقام المرتبطة بالاحتمالات الأخرى لقيم a_5.

2.2.6. نموذج تحديد الحجم الأمثل من الإنتاج لأقسام وفروع منظمة الأعمال الواحدة

إن خطة الإنتاج للمنظمة التي تتألف من عدد من الأقسام أو الفروع يتم توزيعها بحيث أن كل قسم أو فرع يتولى إنجاز جزء من هذه الخطة. الهدف النهائي المطلوب تحقيقه في هذه الحالة هو تحقيق حجم الإنتاج السنوي المحدد في الخطة بحيث تكون التكاليف الكلية لإنتاج أقل ما يمكن. إن فكرة النموذج الرياضي وصياغته تتضح من خلال المشكلة التطبيقية التالية:

مشكلة رقم (1): إحدى المنظمات الإنتاجية (A) متخصصة بإنتاج أنواع معينة من السلع الغذائية. يتم الإنتاج في ثلاثة أقسام رئيسية وهي A_1 , A_2 , A_3

توجد علاقة معينة بين التكاليف الكلية للإنتاج والحجم الكلي للإنتاج في الأقسام المذكورة وذلك كالآتي:

$$K(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2$$

حيث أن X_1, X_2, X_3 هو حجم الإنتاج السنوي للأقسام A_1, A_2, A_3 ، وأن K هي التكاليف الكلية للإنتاج.

إن الخطة السنوية للمنظمة حددت الحجم السنوي للإنتاج (9) وحدات (على سبيل المثال 9000 طن). وقد طلب متخذ القرار في المنظمة من إدارة الإنتاج (بالتعاون مع الإدارة المالية) دراسة المشكلة لتحديد دور أو مهمة كل قسم في تحقيق حجم الإنتاج السنوي المطلوب بحيث تكون تكاليف الإنتاج أقل ما يمكن.

الحل: لحل هذه المشكلة لا بد من توضيح الأمور التالية:

إن كمية الوحدات المطلوب إنتاجها في كل قسم تحقق الشرط $X_1 \leq 0$, $X2 \geq 0$, $X_3 \geq 0$.

كذلك أن: $X_1 + X_2 + X_3 = 9$

المطلوب: تحديد أقل قيمة لدالة الكلفة التالية:

$$K(X_1, X_2, X_3) = g_1(X_1) + g_2(X_2) + g_3(X_3)$$

$$X_i \geq 0$$

(حيث أن: $i = 1, 2, \ldots, N$)

$$X_i \leq a_i$$

حيث أن:

a ← الكمية الكلية المحددة للإنتاج

وإذا كانت: $i = 1 , 2 , 3$ فإن ذلك يؤدي الحصول على العلاقة التالية:

$$X_1 + X_2 + X_3 = a_3$$

ومنه نستنتج أن:

$$X_1 + X_2 = a_2$$
$$X_1 = a_1$$

العلاقات الرياضية الأخرى التي يتم الحصول عليها هي[1]:

$g_1(X_1) = X_1^2$ (كلفة إنتاج الكمية X_1)

$g_2(X_2) = X_2^2$ (كلفة إنتاج الكمية X_2)

$g_3(X_3) = X_3^2$ (كلفة إنتاج الكمية X_3)

على ضوء ما تقدم فإن تحديد قيم مثلى للمتغيرات الأساسية X_i $(i = 1 , 2 , 3)$ كالآتي:

بالنسبة لـ X_1 يكون المطلوب هو تحديد الكمية a_i بحيث أن تكاليف إنتاج X_1 تكون أقل ما يمكن:

$$F_1(a_1) = Man \{g_1(X_1)\}$$

---

(1) العلاقات هذه يتم الحصول عليها كما يلي:

من الفرضية الأساسية: $K(X_1, X_2, X_3) = X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2$

من دالة الهدف: $K(X_1, X_2, X_3) = g_1(X_1) + g_2(X_2) + g_3(X_3)$

وبالاستعاضة نحصل على ما يلي: $g_1(X_1) + g_2(X_2) + g_3 = X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2$

$X_1 = a_1$

$\{X_1^2\} = Min$

$X_1 = a_1$

وبما أن $X_1 = a_1$ لذلك فإن:

$\{a_1^2\} F_1 (a_1) = Min$

$X_1 = a_1$

بالنسبة لـ X_2 (حيث أن $X_1 + X_2 = a_2$) :

$F_2 (a_2) = Min \{g_2 (X_2) + X_1\}$

$0 \leq X_2 \leq a_2$

$= Min \{g_2 (X_2) + F1 (a_1) \}$

$0 \leq X_2 \leq a_2$

$F_1(a_1 - X_2) \} + X_2^2 = Min \{2$

$0 \leq X_2 \leq a_2$

حيث أن: $(a_1 = a_2 – X_1)$

بالنسبة لـ X_3 (وبالاعتماد على العلاقة الرياضية $a_2 = a_3 – X_3$):

$F_3 (a_3) = Min \{g_3 (X_3) + F_2 (a_2)\}$

$0 \leq X_2 \leq a_2$

$F_2(a_3 – X_3) \} + X_3^2 = Min \{$

$0 \leq X_3 \leq a_3$

بالتعويض يمكننا الحصول على ما يلي:

1) بالنسبة لـ X_1 يكون لدينا ما يلي:

$\{a_1^2\} \quad \} = X_3^2 \ F_1 (a_1) = Min \{$

$X_1 = a_1$

حيث أن:

$$X_1 = a_1$$

ومن أعلاه كان لدينا $a_1 = a_2 - X_2$

لذلك فإن:

$$(a_2 - X_2)^2 = a_1^2$$

ومنه أيضاً:

$$F_1(a_1) = (a_2 - X_2)^2$$

2) بالنسبة لـ X_2 يكون لدينا ما يلي:

$$F_1(a_1) \} + X_2^2 = Min \{2 \ F_2(a_2)$$

$$0 \leq X_2 \leq a_2$$

$$F_1(a_2 - X_2)^2 \} + X_2^2 = Min \{2 \ F_2(a_2)$$

$$0 \leq X_2 \leq a_2$$

المطلوب: حساب أقل قيمة للدالة:

$$(a_2 - X_2)^2 \} + X_2^2 = 2 \ y_1$$

حيث أن: $0 \leq X_2 , \leq a_2$

حساب الدالة $\frac{dy}{dX}$ يتم كالآتي:

$$\frac{dy_1}{dX_1} = 4 X_2 + 2 (a_2 - X_2) \quad -1$$

$= 0 = 4X_2 - 2(a_2 - X_2)$

$= 0\ 4X_2 - 2(a_2 - X_2)$

$= 0\ 4X_2 - 2a_2 + 2X_2$

$6X_2 = 2a_2$

$$\boxed{X_2 = \frac{a_2}{3}}$$

يفترض بالقيمة أعلاه أن تحقق الشرط: $0 < \frac{d^2 y^1}{dX_2^2}$ (المشتقة الثانية) حيث:

أن أصل العلاقة $X_2 = \frac{a_2}{3}$ هو $3\ X_2 - a_2 = 0$

وبعد أخذ المشتقة الثانية له:

$$\frac{d^2 y^1}{dX_2^2} = 1.3X^{1-1} - 0$$

$$= 3.X^0$$

$$= 3.1$$

$$= 3$$

(وهو أكبر من الصفر)

وبذلك يحقق الشرط الوارد أعلاه

إن الدالــة y_1 تصــل إلى أقــل قيمــة في النقطــة التــي فيهــا $X_2 = \frac{a_2}{3}$ لأن

$\frac{dy_1}{dX_2} = 0$, $\frac{d^2 y^1}{dX_2^2} = > 0$ وهو الذي يتفق مع الشرط $0 \le X_2 \le a_2$.

لذلك يتم اعتماد القيمة $X_2 = \frac{a_2}{3}$ في اتخاذ القرار، أي:

$$F_2(a_2) = Min\{a X_2^2 + (a_2 - X_2)^2\}$$
$$0 \leq X_2 \leq a_2$$
$$= Min\left\{2\left(\frac{a_2}{3}\right)^2 + \left(a_2 \frac{a_2}{3}\right)^2\right\}$$
$$0 \leq X_2 \leq a_2$$

$$F_2(a_2) = \frac{2}{3} a_2^2$$

3) بالنسبة لـ X_3 يكون لدينا:

$$F_3(a_3) = Min\ \{X \frac{2}{3} + F_1(a_2 - X_2)^2\}$$
$$0 \leq X_3 \leq a_3$$

المطلوب حساب أقل قيمة للدالة

$$y_2 = X_3^2 + \frac{2}{3}\ (a_3 - X_3)^2$$

علماً بأن:

$$0 \leq X_3 \leq a_3$$

في سبيل تحقيق ذلك يتم احتساب المشتقة الأولى لتحديد قيمة X_3

$$\frac{dy_1}{dX_1} = 2X_3 - \frac{4}{3}(a_3 - X_3)$$

وعندما تصل المشتقة إلى نهاية فإن:

$$\frac{dy_2}{dX_3} = 0$$

لذلك نحصل على ما يلي:

$$0 = 2X_3 - \frac{4}{3}(a_3 - X_3)$$

$$\boxed{X_3 = \frac{2}{5}a_3}$$

بالنسبة للمشتقة الثانية فإنها تضمن لنا التأكد من أن القيمة أعلاه لـ X_3 يمكن أن تصل لأكبر من الصفر ($X_1 \geq 0$) أي أن $\frac{dy_2^2}{dx_3^2} > 0$ وذلك يتأكد من خلال أخذ المشتقة الثانية للعلاقة $X_3 = \frac{2a_3}{5}$ ومنه يتضح أن قيمة المشتقة $\frac{dy_2^2}{dx_3^2} = 5$ وهو أكبر من الصفر وهي النهاية الثانية.

إن الدالة y_2 تصل إلى أقل قيمة من النقطة التي بها $X_3 = \frac{2}{5}a_3$ ، وأن النقطة $X_3 = \frac{2}{5}a_3$ تضمن تحقق الشرط $0 \leq X_3 \leq a_3$ لذلك يتم اعتماد القيمة $X_3 = \frac{2}{5}a_3$ في اتخاذ القرار، أي:

$$F_3(a_3) = Min\left\{X_3^2 + \frac{2}{3}(a_3 - X_3)^2\right\}$$

$$0 \leq X_3 \leq X_3$$

$$F_3(a_3) = \frac{2}{5}a_3^2$$

من خلال ما تقدم فإن المتغيرات الأساسية X_1 , X_2 , X_3 تأخـذ القيـم المـثلى التالية:

$$X_3 = \left[\frac{2}{5} a_3 \right]$$

$$X_2 = \frac{a_3}{3} = \frac{a_3 - X_3}{3} = \frac{1}{5} a_3$$

$$X_1 = a_1 = a_2 - X_2$$

$$= a_3 - X_3 - X_2$$

$$= a_3 = \frac{2}{5} a_3 - \frac{1}{5} a_3$$

$$X_1 = \left[\frac{2}{5} a_3 \right]$$

وبما أن $g = a_3$ لذلك فإن:

$$X_3 = \frac{2}{5} a_3 = \frac{18}{5}$$

$$X_2 = \frac{1}{5} a_3 = \frac{9}{5}$$

$$X_1 = \frac{2}{5} a_3 = \frac{18}{5}$$

وإن قيمة الدالة $F_3\ (a_3)$ هي كما يلي:

$$F_3\,(a_3) = F_3\,(9) = Min\left\{ X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2 \right\}$$

$$= \frac{2}{5} a_3^2 = \frac{162}{5}$$

واستناداً إلى ما تقدم تكون النتائج النهائية للمشكلة كما يلي:

إذا كانت مهمة القسمA_1 إنتاج $\frac{18}{5}$ وحدة، والقسم A_2 مهمتـه إنتـاج $\frac{9}{5}$ وحدة، والقسم A_3 مهمته إنتاج $\frac{18}{5}$ وحدة فإن التكاليف الكلية التـي تترتـب على هذه المهام الإنتاجية سوف تكون أقل ما يمكن وهي $\frac{162}{5}$ وحدة نقدية.

مشكلة رقـم (2): في إحـدى مـنظمات الأعـمال الصـناعية المتخصـص بإنتـاج المعـدات المنزليـة توجـد ثـلاث أقسـام رئيسـية للإنتـاج وهـي B_1 , B_2 , B_3 وهنالك علاقة بين تكاليف الإنتاج الكلية وحجم الإنتاج السنوي، يعبر عـن هدف العلاقة كما يلي:

$$K(X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ ,) = X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2$$

حيث أن: X_1 , X_2 , X_3 هو حجم الإنتاج السنوي للأقسام B_1 , B_2 , B_3 على التوالي.

المطلوب: تنفيذ الخطـة السـنوية للإنتـاج (والتـي تتضـمن إنتـاج 9 وحـدة) للأقسام الثلاث بأقل ما يمكن من التكاليف الإنتاجية.

الحل: إن قيم المتغيرات الأساسية في المشكلة ينبغي أن تحقق المشروط التالية:

$X_1 , \geq 0 , X_2 > 0 \geq X_3 \geq 0$

$X_1 + X_2 + X_3 = 9$

إن قيمة المتغيرات الأساسية ينبغي أن تكون قيم كاملة ولا يمكـن أن تكـون كسور عشرية. وأن دالة الهدف للمشكلة هي :

$$K(X_1\ ,\ X_2\ ,\ X_3\ ,) = X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2$$

في ظل الشروط التالية:

$X_1 + X_2 + X_3 = 9$

(حيث أن: $X_i \geq 0 \ (i = 1, 2, 3$

عند البحث عن الحل اللازم للمشكلة يمكن الاستعانة بالعلاقات الرياضية الواردة في المثال السابق، وعندها نحصل على ما يلي:

- بالنسبة للمتغير X_1 :

$$F_1 a_1 = Min\left\{X_1^2\right\} = a_1^2$$
$$X_1 = a_1$$

إن قيمة $F_1 (a_1)$ بدلالة العامل (a_1) تتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (6-8)

$a_1 = X_1$	$F_1 (a_1) = a^2_1$
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
7	49
8	64
9	81

بالنسبة لـ X_2 لدينا ما يلي:

$$F_2 (a_2) = Min\left\{2X_1^2 + F_1 (a_1)\right\}$$
$0 \leq X_2 \leq a_2$

وإن:

$a_1 = a_2 - X_2$

$a_2 = a_1 - X_2$

إن طريقة حساب $F_2(a_2)$ تتوضح من خلال الرسم البياني[1]

حيث في المحور الأفقي يتم وضع قيم a_1 , $F_1(a_1)$ وعلى المحور العمودي يتم وضع القيم الممكنة للمتغير X_2 والمتغير $2X^2_2$. نؤشر أرقام على المحور الأفقي والعمودي.

الخطوة الأولى: هو تحديد النقاط التي محاورها تؤشر أرقاماً على المحور الأفقي a_1 العمودي X_2 تحقق العلاقة التالية:

$a_2 = X_2 - a_1$

الخطوة الثانية: هو تحديد قيم هذه النقاط بالاستناد إلى العلاقة:

قيمة النقطة $= 2X_2^2 + F_1(a_1)$

الخطوة الثالثة: إيصال النقاط التي محاورها سبق وأن تأكدنا منها بأنها، تحقق العلاقة: $a_1 + X_2 = a_2$ تحقق العلاقة التالية:

بعد أن ربطت النقاط بمستقيمات، يتضح لدينا أيضاً أن النقاط المذكورة تقع على مستقيمات متوازية وكل نقطة تقع على المستقيم تحقق المعادلة الملائمة لها كالآتي[2]:

([1]) إن فكرة تصميم هذا الرسم هو نفس ما ورد في الأمثلة السابقة، ويمكن للقارئ الكريم الإطلاع على تفاصيل هذا الرسم عند مراجعة مؤلفنا السابق والموسوم: نمذجة القرارات الإدارية، إصدار مؤسسة اليازوري، 1999، ص178 الجزء الثاني.

([2]) حيث أن قيم a2 هي قيم كاملة تقع بين القيمة 1 و القيمة 9.

$$a_1 + X_2 = a_2 = 1$$
$$a_1 + X_2 = a_2 = 2$$
$$a_1 + X_2 = a_2 = 3$$
$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$
$$a_1 + X_2 = a_2 = 9$$

الخطوة الأخيرة: هو اختيار (لكل قيمة في قيم a_2 وعلى أي مستقيم) تلك النقاط التي تحقق العلاقة التالية:

$$F_2(a_2) = Min\{2X_2^2 + F_1(a_1)\}$$

(لأن المطلوب Min نختار أقل القيم)

بالنسبة لـ X_1 لدينا ما يلي:

$$F_3(a_3) = Min\{2X_3^2 + F_2(a_2)\}$$

وأن: $a_2 = a_3 - X_3$

ومنه : $a_3 = a_2 + X_3 = a_1 + X_1 + X_3 = X_1 + X_2 + X_3$

إن طريقة حساب القيمة المثلى $\alpha_3 = 9$ لـ X_3 لا تختلف عن الطريقة التي تم بها حساب القيم X_1 , X_2 في حين أن هناك فرق هو أن A3 تأخذ القيمة 9 فقط وليس كما مر معنا في الحالات السابقة هو أن a_1 أو a_2 ي يمكن أن أحد القيم التالية:

(, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 90)

$$F_3(a_3) = Min\{2X_3^2 + F_2(a_2)\} = 33$$

في الشكل الخاص بهـذه المشـكلة يتضـح أن بإمكـان المنظمـة أن تختـار أحـد البدائل التالية: (وهما متساويات من حيث الأهمية):

$1)\ X_3 = 3 \quad , \quad a_3 = 6$

$2)\ X_3 = 4 \quad , \quad a_3 = 5$

وعندما تكون $a_2 = 6$ فإن القرار الأمثل هو الذي يتحدد من خلال المحـاور المحـــدد للنقـــاط الواقعـــة عـــلى المســـتقيم ($X_2 + a_1 = a_2 = 6$) هو ما يلي : $X_2 = 2 , a_1 = 4$

وعندما : $a_2 = 5$

$X_2 = 2 , a_1 = 3$

ولما كان $a_1 = X_1$ فإنه سوف يكون لدينا نوعين من بدائل القرارات وهي:

$X_3 = 3 \quad , \quad X_3 = 4$

$X_2 = 2 \quad , \quad X_2 = 2$

$X_1 = 4 \quad , \quad X_1 = 3$

وإن قيمة دالة التكاليف للمشكلة هلي كما يلي:

$$Min\ \{K(X_1, X_2, X_3)\} = Min\{X_1^2 + 2X_2^2 + X_3^2\} = 33$$

واسـتناداً إلى مـا فـإن النتـائج النهائيـة للمشـكلة قيـد الـدرس تشـير إلى أن حجم الإنتـاج السـنوي في الأقسـام الإنتاجيـة B_1 , B_2 , B_3 , B_4 يبلـغ عـلى التوالي 3 4 , 2 , وحـدة أو 34 , 2 , وحـدة. وعنـدها تكـون التكـاليف الكليـة للإنتاج 3.3 وحدة نقدية.

3.2.6. نموذج الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج مع وجود دالة الهدف مضاعفة بمقدار معين

إن بعض المشاكل في الواقع العملي تتطلب صياغة نموذج رياضي من نوع غير اعتيادي تكون فيه دالة الهدف مضاعفة أو مضروبة بمقدار معين وذلك تبعاً لمتطلبات المشكلة المذكورة. وهناك جملة مشاكل يصاغ لها هذا النوع من النماذج الرياضية ومن أهمها هي مشكلة الاستغلال الأمثل لمستلزمات الإنتاج الأساسية. ويكون مؤشر الأمثلية في هذه الحالة هو تحقيق أعلى قيمة ممكنة للإنتاج المحقق.

المشكلة أدناه توضح فكرة تطبيق النماذج الرياضية التي تكون فيها دالة الهدف مضاعفة بمقدار معين.

مشكلة رقم (1): من خلال تحليل المعلومات المستخلصة من سجلات إحدى المنظمات الإنتاجية اتضح أن هناك علاقة بين قيمة الإنتاج من جهة وبين المستلزمات الأساسية الثلاث الداخلة في الإنتاج المذكور وذلك كالآتي:

$$P(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{2000} X_1 X_2 X_3$$

حيث أن X_1 , X_2 , X_3 تمثل حجم الكمية المستهلكة من المستلزمات الأساسية الثلاث (3 ، 2 ، 1).

تكاليف استهلاك المستلزمات الثلاث (1 ، 2 ، 3) هي كالآتي:

$K_1 = 1 , K_2 , = 2 , K_3 = 1$

طلبت إدارة المنظمة من الكادر الفني في إدارة المخازن دراسة المشكلة المذكورة وذلك بهدف تحديد صيغة الاستهلاك الأمثل لمستلزمات الإنتاج الأساسية آخذين بعين الاعتبار مسألة تحقيق قيمة مثلى لقيمة الإنتاج على افتراض أن تكاليف استهلاك المستلزمات الأساسية المذكورة تبلغ (4000) وحدة نقدية.

الحل: كشفت السجلات والوثائق المعتمدة من قبل الكادر الفني عن الافتراضات وإجراءات الحل التالية:

لو كانت X_i (i = 1 , 2 , 3) تمثل حجم استهلاك نوع معين من مستلزمات الإنتاج وهو i ، فإن تكاليف استهلاك مستلزمات الإنتاج الأول (1) يبلغ $K_1 \; X_1 \longleftarrow 1X_1$.

الثاني (2) يبلغ $K_2 \; X_2 \longleftarrow 2X_2$

الثالث (3) يبلغ $K_3 \; X_3 \longleftarrow 1X_3$

لذلك فإن التكاليف الكلية لاستهلاك مستلزمات الإنتاج تحسب كالآتي:

$$K_1 X_1 + K_2 X_2 + K_3 X_3 = 1X_1 + 2X_2 + 1X_3$$

بما أنه تم افتراض تكاليف استهلاك مستلزمات الإنتاج بحدود 4000 وحدة نقدية، لذلك فإن ذلك يؤدي إلى الحصول على الشرط التالي:

$$1X_1 \; + \; 2X_2 \; + \; 1X_3 = 4000$$

وهناك شرط آخر يتعلق بقيمة المتغيرات الأساسية X_1 , X_2 , X_3 وهو:

$$X_1 \geq 0 \quad , \quad X_2 \geq 0 \quad , \quad X_1 \geq 0$$

إن حل هذه المشكلة يؤدي إلى إيجاد القيمة العظمى للدالة التالية:

$$F(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{2000} X_1 X_2 X_3$$

إن الطريقة التي يجب استخدامها لحل هذه المشكلة هي البرمجة الديناميكية، حيث يقتضي الأمر هنا وضع افتراض جديد وهو أن a_i تمثل مجموع تكاليف الاستهلاك (i) من مستلزمات الإنتاج، لذلك:

$a_3 = 4000$

بهدف تبسيط المشكلة يتم كتابة دالة الهدف كما يلي:

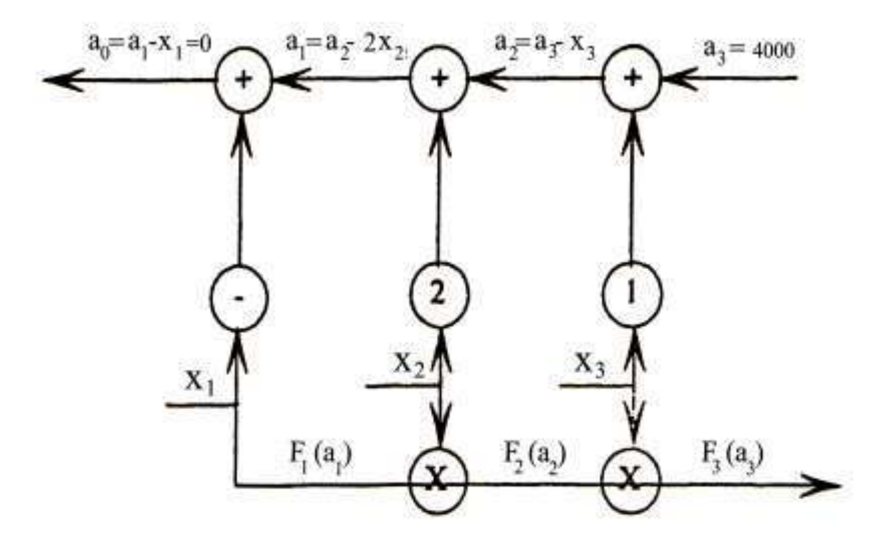
$F(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_2 X_3$

حيث أن:

$$P(X_1, X_2, X_3) = \frac{1}{2000} F(X_1 X_2 X_3)$$

حيث أن $\frac{1}{2000}$ هو المعامل الثابت الذي تم اختزاله من الطرفين ليس له تأثير على اختيار القيمة المثلى لأي متغير أساسي في المتغيرات X_1, X_2, X_3، وبالاستناد إلى مفاهيم البرمجة الديناميكية يمكن رسم الشكل الذي يعبر عن هذه المشكلة:

الشكل رقم (6-8) التعبير عن المشكلة رياضياً



إن الدالة $F_3\ (a_3)$ (حيث أن: $i = 1 , 2 , 3$) تمثل القيمة القصوى للإنتاج وذلك عندما تكون تكاليف استهلاك (i) من مستلزمات الإنتاج في مستوى a_i وحدة نقدية. وحدة نقدية. وهناك بعض الشروط ينبغي استيفائها وهي:

$$a_0 = 0$$
$$a_1 \geq 0$$
$$a_2 , \geq 0$$

وعلى هذا الأساس فإن:

$$a_1 - X_1 = 0$$
$$a_2 - 2X_2 \geq 0$$
$$a_3 - X_3 \geq 0$$

عليه فإن:

$$X_1 = a_1$$
$$\frac{a_2}{2}\ X_2 \leq$$
$$X3 \leq a_3$$

بالاستناد إلى الشكل (6–8) وقواعد الحل الأمثل المعتمدة في البرمجة الديناميكية، نعرض أدناه علاقات الدول التي تهدف إلى إيجاد القيمة المثلى للمتغيرات الأساسية:

- بالنسبة للمتغير X_1 :

$$F_1(a_1) = Max\{X_1\} = a_1$$
$$X_1 = a_1$$

- بالنسبة للمتغير X_2 :

$$F_2(a_2) = Max\{X_2, F_1(a_1)\}$$
$$\frac{a_2}{2} \quad 0 \le X_2 \le$$

حيث أن : $a_1 = a_2 - 2X_2$

- بالنسبة للمتغير X_3 :

$$F_3(a_3) = Max\{X_3, F_2(a_2)\}$$
$$0 \le X_2 \le a_3$$

حيث أن : $a_2 = a_3 - 2X_3$

ويتم حساب قيم المتغيرات الأساسية X_1, X_2, X_3 كما يلي:

أولاً: إيجاد قيمة X_1

$$F_1(a_1) = X_1 = a_1$$

ثانياً: إيجاد قيمة X_2

$$F_2(a_2) = Max\{X_2, F_1(a_1)\}$$

$$0 \le X_2 \le \frac{a_2}{2}$$

$$F_2 (a_2) = Max \{X_2 , a_1\}$$

$$0 \le X_2 \le \frac{a_2}{2}$$

$$F_2 (a_2) = Max \{X_2 ,(a_1 - 2X_2)\}$$

$$0 \le X_2 \le \frac{a_2}{2}$$

يتم حساب المشتقة الأولى والثانية لعلاقة الدوال أعلاه لتحديد القيمـة المـثلى لها وذلك كما يلي:

$$y_1 = X_2 (a_2 - 2X_2) = X_2 \; a_2 - 2X_2^2$$

وذلك عندما : $0 \le X_2 \le \frac{a_2}{2}$

$$\frac{dy_1}{dX_2} = a_2 - 4X_2$$

وعندما تصل الدالة أعلاه إلى نهاية معينة ، فإن : $\frac{dy_1}{dX_2} = 0$

لذلك فإن:

$$a_2 - 4 X_2 = 0$$

$$a_2 - 4X_2$$

$$X_2 = \frac{a_2}{4}$$

ولما كان للمتغير $X_2 \Leftarrow \frac{a_2}{4}$ يتحقق الشرك التالي[1]:

$$\frac{d^2y_1}{dX_2^2} = < 0$$

لذلك فإن الدالة y_1 تصل إلى أعلى ما يمكن لها في النقطة $X_2 = \frac{a_2}{4}$. عليـه يتم اتخاذ القرار باعتماد القيمة $X_2 = \frac{a_2}{4}$ ، حيث أن ذلك سوف يجعل من قـيم المتغـيرات الأساسـية للدالـة y_1 تصـل إلى أقصى قيمـة لهـا وبالـذات عنـدما $0 \leq X_2 \leq \frac{a_2}{4}$ عند الحصول على قيمة X_2 من الدالة $y_1 = X_2 (a_2 - 2X_2)$.

يتم التعويض عن هذه القيمة في علاقة الدوال الأصلية هي:

$$F_2(a_2) = Max\{X_2(a_2 - 2X_2)\} = \frac{a_2^2}{8}$$

$$0 \leq X_2 \leq \frac{a_2}{2}$$

---

(1) حيث أن: $\frac{dy_1}{dX_2} = a_2 - 4X_2$

$$\frac{d\frac{dy_1}{dy_2}}{dX_2} = 0 - 4$$

$$\frac{d^2y_1}{dX_2^2} = -4$$

ثالثاً : إيجاد قيمة X_3

$$F_3(a_3) = Max\{X_3 \,, F_2(a_2)\}$$
$$0 \le X_3 \le a_3$$

$$F_3(a_3) = Max\left\{X_3 \frac{a_2^2}{8}\right\}$$
$$0 \le X_3 \le a_3$$

وبالتعويض عن قيمة $(a_3 - X_3) = a2$ نحصل على ما يلي:

$$F_3(a_3) = Max\left\{X_3 \frac{(a_3 - X_3)^2}{8}\right\}$$
$$0 \le X_3 \le a_3$$

إن تحديد أعلى قيمة للدالة يتم كالآتي:

$$y_3 = X_3 \; \frac{(a_3 - X_3)^2}{8}$$

حيث أن : $0 \le X_3 \le a_3$

وعلى هذا الأساس يتم حساب المشتقة الأولى $\frac{dy_2}{dX_3}$ وذلك كما يلي:

$$\frac{dy_2}{dX_3} = \frac{3X_3^2 - 4a_3 X_3 + a_3^2}{8}$$

وعندما تصل الدالة إلى نهاية معينة (صغرى أو عظمى) فإن: $\frac{dy_2}{dX_3} = 0$

$$\frac{3X_3^2 - 4a_3 X_3 + a_3^2}{8} = 0$$

وبعد حل هذه المعادلة نحصل على القيم التالية لـ X_3:

$$a_3 \Leftarrow X_3 \quad (1)$$

$$\frac{a_3}{3} \Leftarrow X_3 \quad (2)$$

وبما أنه فقط بالنسبة لقيمة $\left(\frac{a_3}{3} \Leftarrow X_3\right)$ يحقق الشرط (العلاقة) التالي:

$$\frac{d^2 y_2}{dX_3^2} < 0$$

أي أن في النقطة $\frac{a_3}{3} \Leftarrow X_3$ الدالة y_2 تصل إلى أقصى قيمة لها. لذلك يتم اتخاذ القرار باعتماد قيمة المتغير الأساسي $\frac{a_3}{3} \Leftarrow X_3$.

ولما كانت الدالة y_2 تصل إلى أقصى قيمة لها في ظل قيمة $\frac{a_3}{3} \Leftarrow X_3$ المذكورة وهو الذي يتفق مع الشرط $0 \le X_3 \le a_3$ ، لذلك يتم التعويض في علاقة الدالة الأصلية وهي:

$$F_3(a_3) = Max\left\{X_3 \frac{(a_3 - X_3)^2}{8}\right\}$$

$$0 \le X_3 \le a_3$$

$$F_3(a_3) = \frac{a_3^3}{54}$$

ومما تقدم يتضح أن القيم التي تم الحصول عليها هي:

$$X_3 = \frac{a_3}{3} \qquad a_3 = 4000$$

$$X_2 = \frac{a_2}{4} \qquad a_2 = a_3 - X_3 = a_3 - \frac{a_3}{3} = \frac{8000}{3}$$

$$X_1 = a_1 \qquad a_1 = a_2 - 2X_2 = a_2 - \frac{a_2}{4} = \frac{a_2}{2} = \frac{4000}{3}$$

ومن أعلاه يتم الحصول على ما يلي:

$$X_1 = \frac{4000}{3}, \; X_2 = \frac{2000}{3}, \; X_3 = \frac{4000}{3}$$

وإن أقصى قيمة للدالة $F(X_1, X_2, X_3)$ تبلغ كالآتي:

$$F_3(a_3) = \underset{0 \le X_3 \le a_3}{Max} \left\{ X_3 \; \frac{(a_3 - X_3)^2}{8} \right\} = \frac{a_3^3}{54} = \frac{(4000)^3}{54} = \frac{64\,X\,10^9}{54}$$

وعلى أساس النتائج أعلاه، يتضح أن حجم استهلاك مستلزمات الإنتاج 3 ، 2 ، 1 هي عـلى التـوالي: $X_1 = \frac{4000}{3}, \; X_2 = \frac{2000}{3}, \; X_3 = \frac{4000}{3}$ وحـدة، وأن أقصى قيمة للإنتاج تبلغ:

$$\frac{1}{2000} F_3(a_3) = \frac{16}{27} (10)^6$$ وحدة نقدية

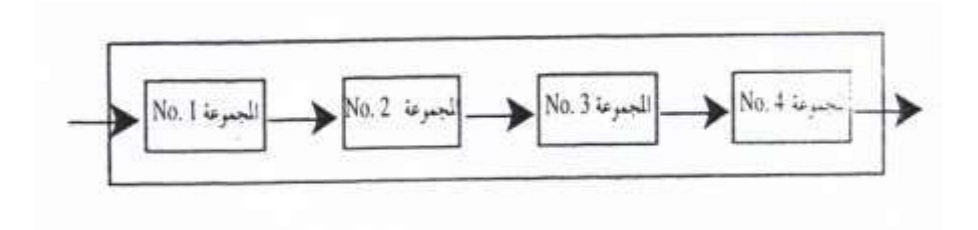
4.2.6. نموذج توزيع المبالغ النقدية بين عمليات الصيانة

إن عمليات الصيانة في أغلب منظمات الأعمال (وبالذات الإنتاجية منها) عادة تتم بشكل دوري ومنتظم تبعاً للحالة التي تكون فيها المعدات والمكائن العاملة ضمن الخطوط الإنتاجية في المنظمة. وعند اتخاذ قرار بخصوص حالة ماكنة معينة للصيانة، فإنه يؤخذ بنظر الاعتبار مدى كفاءة الماكنة للعمل في خطوط الإنتاج بعد إنجاز عملية الصيانة، ومقدار المبلغ الكلي المخصص لتمويل عملية الصيانة المذكورة.

المشكلة التطبيقية أدناه توضح فكرة صياغة النموذج الرياضي لمعالجة عملية صيانة مجموعات من المكائن تعمل ضمن الخط الإنتاجي لإحدى المنظمات الصناعية.

المشكلة رقم (1): في إحدى المنظمات الصناعية توجد مجموعة من المكائن الصناعية التي هي مصممة كما هو واضح في الشكل التالي:

الشكل رقم (6-9) خط إنتاجي يحوي مجموعات من المكائن



إن كل ماكنة في الخط الإنتاجي تخضع إلى صيانة شاملة. إن صلاحية كل مجموعة من المكائن هو دالة لحجم الإنفاق المحدد للصيانة. البيانات المتعلقة

بمدى صلاحية كل مجموعة بالقياس إلى حجم الإنفاق على الصيانة يتضح من خلال الجدول التالي:

جدول رقم (6-9) صلاحية مجموعات المكائن قياساً بحجم الإنفاق على الصيانة

حجم المبالغ النقدية / صلاحية مجموعات المكائن	0	1	2	3	4	5	6	7
صلاحية المجموعة No.1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.4	0.5	0.6	0.7
صلاحية المجموعة No.2	0.2	0.3	0.3	0.5	0.6	0.6	0.7	0.7
صلاحية المجموعة No.3	0.2	0.3	0.3	0.4	0.5	0.5	0.6	0.6
صلاحية المجموعة No.4	0.1	0.2	0.3	0.3	0.5	0.5	0.5	0.5

إن أعلى قيمة ممكنة للمبالغ النقدية التي يمكن تخصيصها لتمويل عمليات الصيانة الشاملة للمكائن لا يمكن أن تزيد عن 7 وحدات نقدية (على سبيل المثال 70000 دينار).

المطلوب: طلبت المنظمة من شعبة الصيانة في إدارة الإنتاج وبالتنسيق مع الإدارة المالية دراسة المشكلة لوضع الخطة التي بموجبها يتم التوزيع الأمثل للمبالغ النقدية المخصصة للصيانة مع الأخذ بعين الاعتبار الاحتفاظ بأقل عدد من المكائن غير الصالحة للعمل.

الحل: لحل المشكلة يتم وضع الفرضيات التالية:

$X_1 \leftarrow$ المبالغ النقدية المخصصة لتمويل الصيانة الشاملة.

$X_{2i}(i=1,2,3,4) \leftarrow$ المبالغ النقدية (المتغيرات الأساسية) المخصصة لتمويل الصيانة الشاملة للمجموعة i من المكائن.

$\alpha \leftarrow$ صلاحية المكائن.

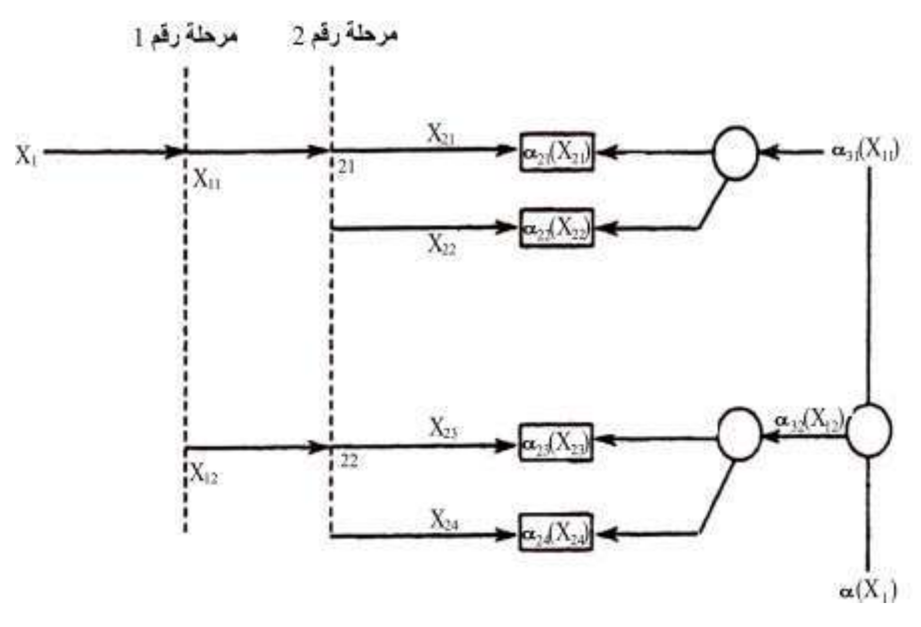
$\alpha_{2i}(i=1,2,3,4) \leftarrow$ صلاحية المجموعة i من المكائن.

من الشروط المنطقية للمشكلة هو أن X1 الذي يمثل حجم المبالغ النقدية

$0 \leq X_1 \leq 7$

المشكلة قيد الدرس يمكن اعتبارها مجزأة إلى مرحلتين أساسيتين لعرض اتخاذ القرار وذلك كما هو واضح في الشكل التالي:

الشكل رقم (6-10) مراحل اتخاذ القرار



في المرحلة الأولى (نقطة اتخاذ القرار رقم 1) المقدار X_1 من المبالغ النقدية يتم تجزئتها إلى قسمين هي X_{11} و X_{12} (حيث أن : $X_1 = X_{11} + X_{12}$).

في المرحلة الثانية (نقطة اتخاذ القرار رقم 21 و 22) المقـادير X_{11} ، X_{12} تقسـم إلى X_{21} , X_{22} وكذلك إلى X_{23} , X_{24}.

(حيث أن: $X_{11} = X_{21} + X_{22}$, $X_{12} = X_{23} + X_{24}$)

ولو تم تخصيص مبلغ لتمويل الصـيانة الشـاملة لكـل مجموعـة مـن المكـائن بالمقادير X_{21} , X_{22} , X_{23} , X_{24} ، فإن صلاحية العمل التي سوف يـتم الحصـول عليها لكل مجموعة مكائن هي كما يلي:

$$\alpha_{21}(X_{21}) , \alpha_{22}(X_{22}) , \alpha_{23}(X_{23}) , \alpha_{24}(X_{24})$$

في حين أن صلاحية العمل لخط إنتاجي يحوي مجاميع مـن المكـائن، كـما هـو وارد في الشكل (6–10) تحسب كالآتي:

$$\alpha(X_1) = \alpha_{21}(X_{21}) , \alpha_{22}(X_{22}) , \alpha_{23}(X_{23}) , \alpha_{24}(X_{24})$$

ومن منطوق المشكلة نفهم أن حجم المبالغ النقدية المقسمة لا يمكن أن تزيـد عن 7 وحدات نقدية، أي أن:

$$X_1 = X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 7$$

إن أمام متخذ القرار مهمة تحديد أقصى قيمة للدالة التالية:

$$\alpha(X_1) = \alpha_{21}(X_{21}) , \alpha_{22}(X_{22}) , \alpha_{23}(X_{23}) , \alpha_{24}(X_{24})$$

وذلك في ظل تحقق الشروط (المتعلقة باختيار المتغيرات الأساسية) التالية:

$$X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} \leq 7$$
$$X_{21} \geq 0 , X_{22} \geq 0 , X_{23} \geq 0 , X_{24} \geq 0$$

طبقاً للرموز والتقسيمات المعتمدة في الشكل (6-10) فإن الدالة $\alpha(X_1)$ يمكن كتابها كما يلي:

$$\alpha(X_1) = \alpha_{31}(X_{11}) , \alpha_{32}(X_{12})$$

حيث أن:

$$\alpha_{31}(X_{11}) = \alpha_{21}(X_{21})\alpha_{22}(X_{22})$$

$$\alpha_{32}(X_{12}) = \alpha_{23}(X_{23})\alpha_{24}(X_{24})$$

بالاعتماد على الشكل رقم (6-10) والأسس المعتمدة في البرمجة الديناميكية يتم معالجة هذه المشكلة حيث تبدأ معالجة المشكلة من المرحلة رقم (2) وكما يلي:

1- إن نقطة اتخاذ القرار في هذه المرحلة هي 21، حيث يقتضي الأمر تقسيم X_{11} في هذه المرحلة إلى المقادير X_{21} , X_{22} بالطريقة التي تؤدي إلى الحصول على أقصى صلاحية عمل لمجموعة المكائن رقم 1 ورقم 2، أي أن:

$$\begin{aligned} \alpha_{31}(X_{11}) &= Max\ \{\alpha_{21}(X_{21})\alpha_{22}(X_{22})\} \\ & X_{11} \leq 7 \\ &= Max\ \{\alpha_{21}(X_{21})\alpha_{22}(X_{22})\} \\ & X_{21} + X_{22} \leq 7 \end{aligned}$$

2- بالنسبة لنقطة اتخاذ القرار الأخرى 22، يقتضي الأمر هنا تقسيم X_{12} إلى المقادير X_{23} , X_{24} بالطريقة التي تؤدي إلى الحصول على أقصى صلاحية عمل لمجموعات المكائن رقم 3 ورقم 4، أي أن:

$$\begin{aligned} \alpha_{32}(X_{12}) &= Max\ \{\alpha_{23}(X_{23})\alpha_{24}(X_{24})\} \\ & X_{1} \leq 7 \\ &= Max\ \{\alpha_{23}(X_{23})\alpha_{24}(X_{24})\} \\ & X_{23} + X_{24} \leq 7 \end{aligned}$$

بالنسبة للمرحلة رقم (1) فإن:

نقطة اتخاذ القرار في هذه المرحلة هي (1)، حيث يقتضي الأمر تقسيم X1 (المبالغ النقدية المخصصة لتمويل عمليات الصيانة الشاملة) إلى قسمين X12 + X11 بحيث في نهاية الأمر يتم الحصول على أقصى صلاحية عمل للمكائن على الخط الإنتاجي ككل، وذلك كما يلي:

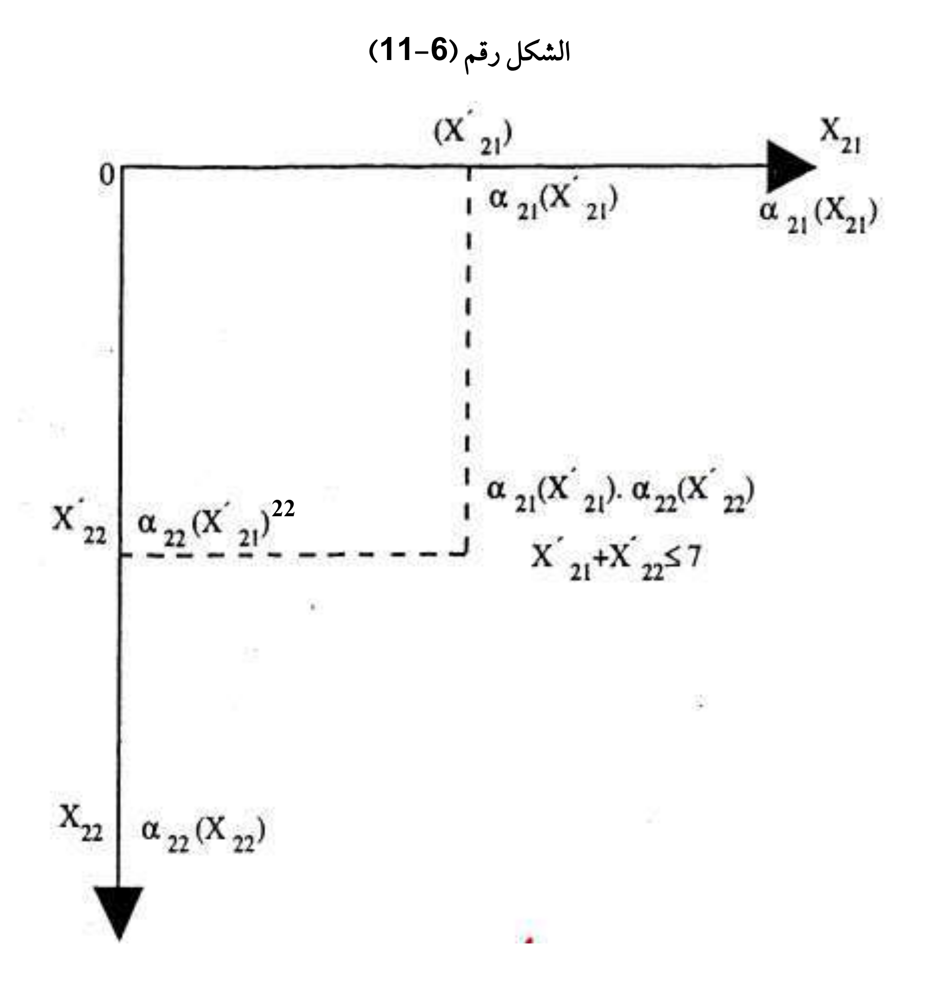
$$\alpha(X_1) = Max\ \{\alpha_{31}(X_{11})\alpha_{32}(X_{12})\}$$
$$X_1 \le 7$$
$$= Max\ \{\alpha_{31}(X_{11})\alpha_{32}(X_{12})\}$$
$$X_{11} + X_{12} \le 7$$

من الجدول رقم (6-9) يتضح أن المتغيرات الأساسية ينبغي أن تكون أرقاماً كاملة. ويتم الاعتماد على الأشكال البيانية في حل هذه المشكلة، كما مر معنا في الأمثلة السابقة. وبخصوص المرحلة رقم (1) فإن المطلوب فيها هو إجراء الحسابات لنقاط القرار 21، 22، وذلك كما يلي:

1- إجراء الحسابات للنقطة 21 بما يتفق والعلاقة الرياضية التالية:

$$\alpha_{31}(X_{11}) = Max\ \{\alpha_{21}(X_{21})\alpha_{22}(X_{22})\}$$
$$X_{11} \le 7$$

الشكل رقم (6-11)



إن المحـاور الأساسـية للشـكل رقـم (6-11) هـي $[X_{21}, \alpha_{21}(X_{21})]$ وكـــذلك $[X_{22}, \alpha_{22}(X_{22})]$. أمـــا القـــيم الأخـــرى وهـــي

$\alpha_{22}(X_{22})\ ,\ \alpha_{21}(X_{21})$

يـتم الحصـول عليهـا مـن الجـدول (6-9) حيـث أنهـا تخـص المجموعـة رقـم (1) والمجموعـة رقـم (2). وينبغـي أن تحقـق القـيم X_{21} , X_{22} الشرـط $X_{21} + X_{22} \leq 7$.

مـن الشـكل رقـم (6–11) يـتم حسـاب القيمـة $\alpha_{21},(X_{21})\alpha_{22}(X_{22})$ والتـي هـي تسـاوي $\alpha_{11}(X_{11})$ وبعـد يـتم ربـط النقـاط التـي تحقـق الشرط التالي:

$X_{21} + X_{22} = X_{11}$

حيث أن: $X_{11} \leq 7$

إن هذه النقاط تقـع عـلى مسـتقيمات تشـكل زوايـا مـع المحـاور الأساسـية الموضحة الشكل رقم (6–11).

بعد ذلك يتم تحديد القيمة من خلال العلاقة التالية:

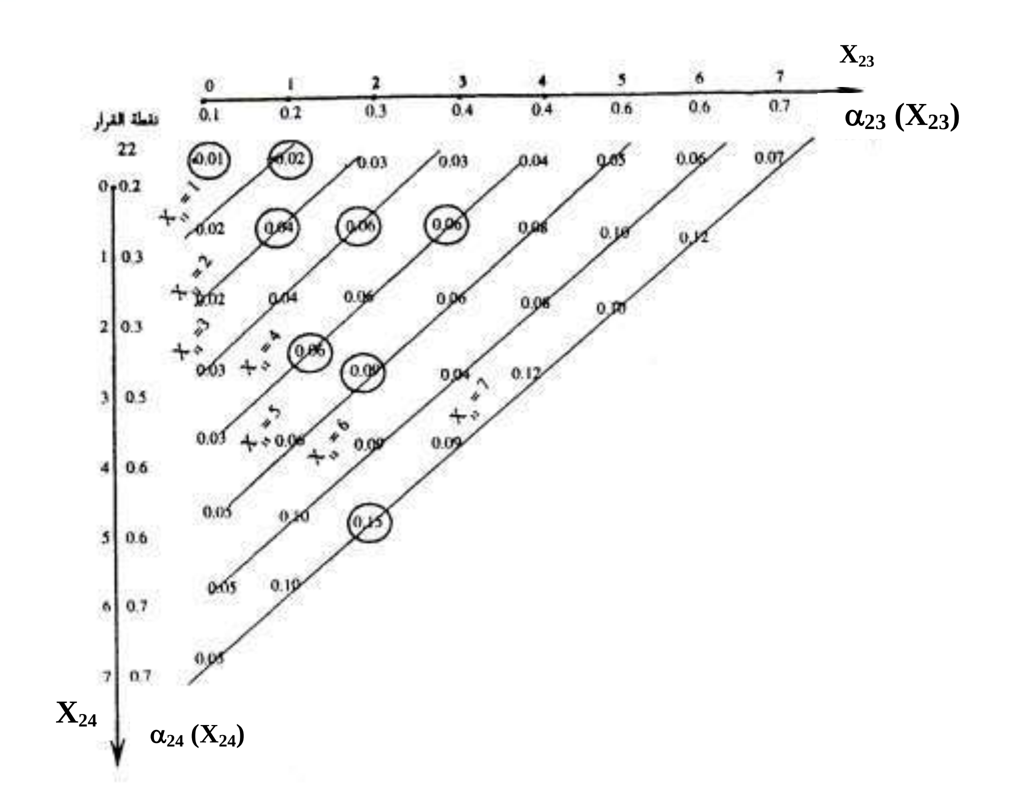
$$\alpha_{31}(X_{11}) = Max\ \{\alpha_{21}(X_{21})\alpha_{22}(X_{22})\}$$
$$X_{11} + X_{24} \leq 7$$

2– إجراء الحسابات للنقطة 22 و ذلك بالاستناد إلى العلاقة الرياضية:

$$\alpha_{32}(X_{12}) = Max\ \{\alpha_{23}(X_{23})\alpha_{24}(X_{24})\}$$
$$X_{23} + X_{24} \leq 7$$

وبعد القيام بالحسابات اللازمة (والتي هي مشابهة إلى الحسابات التـي مـرت معنا في النقطة 21) نحصل على الشكل التالي:

الشكل رقم (6–13) حساب قيمة $\alpha_{32}(X_{12})$



3- إجـراء الحسـابات للنقطـة 1 (التـي هـي مشـابهة إلى الحسـابات عنـد النقاط 22، 21، وذلك بالاستناد إلى العلاقة الرياضية التالية:

$$\alpha(X_1) = Max\ \{\alpha_{31}(X_{11})\,\alpha_{32}(X_{32})\}$$
$$X_{11} + X_{12} \leq 7$$

علماً بأن القيمة $\alpha_{31}(X_{31})$ والقيمة $\alpha_{32}(X_{12})$ هي موجـودة في الـدوائر التي تم تحديدها في الشكل (6-12) والشكل رقم (6-13).

وعند العـودة مـرة أخـرى إلى الأشـكال (6-11) و (6-12) فـإن بالإمكـان تحديد ما يلي:

$X_{21} + X_{22} = X_{11}$

من الشكل رقم (6-11)

$X_{11} \leq 7$

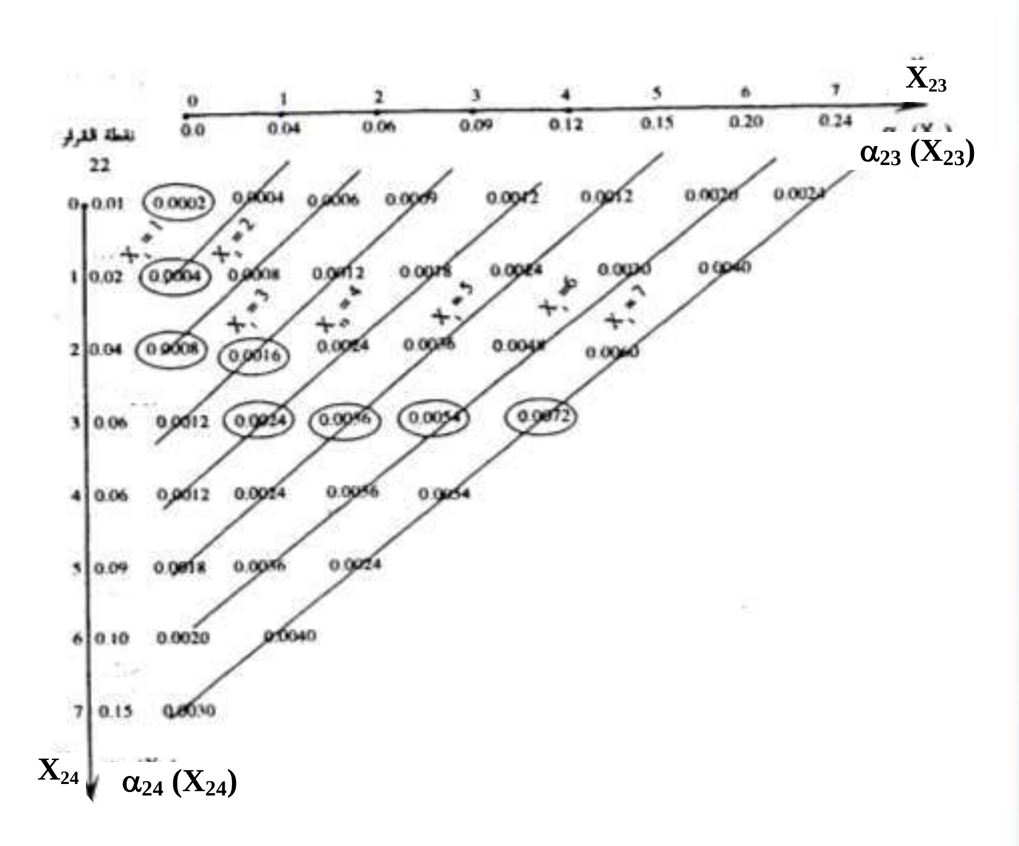
$X_{23} + X_{24} = X_{12}$

ومن الشكل رقم (6-12)

$X_{12} \leq 7$

النتائج النهائية للمشكلة تتضح من خلال الشكل التالي:

الشكل رقم (6-14)



إن الأرقام والبيانات التي يتم الحصول عليها من الأشكال السابقة يتم عرضها في الجدول (6–10) على سبيل المثال لو تم أخذ إحدى القيم وهي : $X_1=$ 6 من الشكل (6–12) وتم التعويض عن هذه القيمة في العلاقة:

$$\alpha(X_1) = Max\ \{\alpha_{31}(X_{11})\alpha_{32}(X_{32})\}$$
$$X_{11} + X_{12} \le 7$$

فإن ذلك يؤدي إلى الحصول على ما يلي:

$$\alpha(6) = Max\ \{\alpha_{31}(X_{11})\alpha_{32}(X_{32})\}$$
$$X_{11} + X_{12} = X = 6$$

حيث في النقط $X_1 = 6$ تقرأ قيم الإحداثيات X_{11} , X_{12} كما يلي :

$X_{11} = 3$, $X_{12} = 3$

وعلى هذا الأساس فإن:

$$\alpha_{31}(X_{11}) = \alpha_{31}(3) = 0.09$$
$$\alpha_{32}(X_{12}) = \alpha_{32}(3) = 0.09$$

الخطوة التالية هو حساب التقسيم الأمثل عندما $X_{11} = 3$, $X_{12} = 3$ وذلك على أساس الشكل رقم (6–11) والشكل (6–12) وذلك كما يلي:

من الشكل رقم (6–12) عندما $6 = X_{12} \leftarrow (3)$

$$\alpha_{32}(X_{12}) = Max\ \{\alpha_{23}(X_{23})\alpha_{24}(X_{24})\} = 0.06$$
$$X_{23} + X_{24} = X_{12} = 7$$

جدول رقم (6-10) النتائج النهائية للمشكلة

مدى صلاحية مجاميع المكائن للعمل				التخصيصات المرنة				معدل صلاحية الخط للعمل	مجموع المبالغ النقدية مقاس بالوحدات (دينار) بالالاف
مجموعة 4 α_{24}	مجموعة 3 α_{23}	مجموعة 2 α_{22}	مجموعة 1 α_{21}	مجموعة 4 X_{24}	مجموعة 3 X_{23}	مجموعة 2 X_{22}	مجموعة 1 X_{21}		
0.1	0.1	0.2	0.1	0	0	0	0	0.0002	0
0.1	0.2	0.2	0.1	0	1	0	0	0.0004	1
0.2	0.2	0.2	0.1	1	1	0	0	0.0008	2
0.2	0.2	0.2	0.2	1	1	0	1	0.0016	3
0.2	0.3	0.2	0.2	1	2	0	1	0.0024	4
0.2	0.3	0.3	0.2	1	2	1	1	0.0036	5
0.2	0.3	0.3	0.3	1	2	1	2	0.0054	6
0.2	0.3	0.3	0.4	1	2	1	3	0.0072	7

حيث أن:

$$X_{23}=2 \qquad X_{24}=1$$
$$\alpha_{23}(2)=0.3 \qquad \alpha_{24}(1)=0.3$$

من الشكل رقم (11.7) عندما $X_{11} \leftarrow (3)$

$$\alpha_{31}(X_{11}) = Max\ \{\alpha_{21}(X_{21})\,\alpha_{22}(X_{22})\}=0.09$$
$$X_{21} + X_{22} = X_{11}=3$$

حيث أن:

$$X_{21}=2 \qquad X_{22}=1$$
$$\alpha_{21}(2)=0.3 \qquad \alpha_{22}(1)=0.3$$

هكذا بالنسبة للقيم

$X_1 = 7$, $X_1 = 5$, $X_1 = 4$, $X_1 = 3$, $X_1 = 2$, $X_1 = 1$, $X_1 = 0$

5.2.6. نموذج استغلال رأس المال المستثمر في المخزون والمكائن

يواجه متخذ القرار في بعض المنظمات مشكلة استغلال رأس المال المستثمر في مخزون المواد الأولية أو البضائع الجاهزة وكذلك المكائن المتوفرة التي يتم تشغيلها في المنظمة للحصول على دخل معين. بخصوص استغلال المخزون من المواد، فإن متخذ القرار يسعى لأن تكون قيمة الدخل الإجمالي للمنظمة أعلى ما يمكن مع الأخذ بنظر الاعتبار وجود الخزين الابتدائي. أما بالنسبة لاستغلال المكائن فإن متخذ القرار يسعى لأن تكون عملية استغلال المتوفر من المكائن الصالحة للعمل تحقق أعلى عائد ممكن للمنظمة مع الأخذ بعين الاعتبار مشكلة الاندثار التي تؤثر على العدد النهائي من المكائن الصالحة للعمل ضمن فترة زمنية معينة. في الحالة الأولى يتطلب الأمر صياغة نموذج رياضي يأخذ بعين الاعتبار مسألة الخزين الابتدائي. أما في الحالة الثانية فيجب أن يؤخذ بنظر الاعتبار مسألة الاندثار وعدد المكائن الصالحة للعمل عند صياغة النموذج الرياضي اللازم لذلك. وأدناه اثنين من المشاكل التطبيقية، الأولى توضح المهام المتعلقة بخزين المواد والثانية توضح المهام المتعلقة بالمكائن مع بيان الكيفية التي يتم بموجبها صياغة النموذج الرياضي لكلا المشكلتين.

مشكلة رقم (1): منظمة أعمال إنتاجية تملك مخزون من المواد الأولية في بداية السنة i يبلغ (X_i) إن كمية المخزون الابتدائيين تقسم إلى قسمين هما: (y_i) و($y_i - X_i$) وبعد سنة من استخدام المتوفر من المخزون y_i يتم الحصول على دخل مقداره g_i (y_i) . وعند استخدام المتوفر من المخزون ($X_i - y_i$) يتم الحصول على دخل مقداره h_i ($X_i - y_i$) .

عندما تستخدم المنظمة كمية المخزون الابتدائية البالغة (y_i) و ($y_i - X_i$) لمدة سنة واحدة فإنه سوف ينقص إلى المستوى.

$a_i\ y_i$ وكذلك $B_i\ (X_i - y_i)$

حيث أن:

$0 \leq a_i \leq 1$
$0 \leq b_i \leq 1$

لذلك في بداية السنة ($i + 1$) يكون لدى المنظمة كمية من المخزون (القسمين الأول والثاني) مقداره: $a_i\ y_i + b_i\ (X_i - y_i) = X_i + 1$.

المطلوب: طلبت المنظمة من إدارة المخازن وضع صيغة حل بياني ورياضي للمشكلة يتم عندها تحديد قيمة المتغيرات الأساسية $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_i \ldots y_N$ وذلك بحيث تكون قيمة الدخل الإجمالي للمنظمة للفترة N من السنوات أعلى ما يمكن. علماً بأن المنظمة المذكورة تملك في بداية السنة كمية من المخزون مقدارها X.

الحل: لحل هذه المشكلة يتطلب الأمر وضع الافتراضات التالية:

القيمة القصوى للدخل الذي يتحقق عند استخدام الكمية الابتدائية من المخزون (X)، في i من السنوات، علماً بأن $h_i\ (X_i - y_i)$ و $g_i\ (y_i)$ تمثل مقدار الدخل الذي تحصل عليه المنظمة نتيجة لاستخدام في i من السنوات الكميات yi وكذلك ($x_i - y_i$).

لذلك إن الدخل الكلي عندما يستخدم المتوفر من الخزون الابتدائي (X) من خلال N من السنوات يحسب كالآتي:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{N} g_i(y_i)+\sum_{i=1}^{N} h_i(X_i-y_i)$$

إن حل المشكلة يكون من خلال تحديد قيم المتغيرات الأساسية $y_1 , y_2 , y_3 , \ldots, y_N$ الذي يجعل من دالة الهدف التالية أعظم ما يمكن.

$$D(X)=\sum_{i=1}^{N} g_i(y_i)+\sum_{i=1}^{N} h_i(X_i-y_i)$$

مع تحقيق الشرط التالي:

$$0 \leq y_i \leq X_i$$

حيث أن: $i = 1 , 2 , 3 , \ldots, N$

كما ذكرنا أعلاه أن كمية المخزون الابتدائي في السنة (i+1) هي بالمستوى :

$$X_{i+1} = a_i y_i + b_i (X_i - y_i)$$

ومنه يمكن أن نستنتج أن كمية المخزون الابتدائي في السنة (i) هي بالمستوى:

$$X_i = a_{i-1} y_{i-1} + b_{i-1} (X_{i-1} - y_{i-1})$$

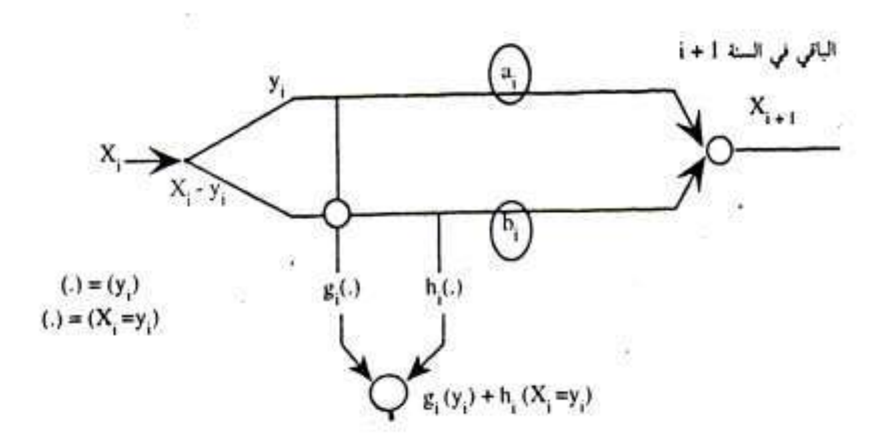
حيث أن : $i = 2 , 3 , 4 , \ldots, N$

وتحقيق الشرط التالي أيضاً: $X_i = X$

إن هذه المشكلة يتم معالجتها بالاستناد إلى مفاهيم البرمجة الديناميكية. ويتم الاستعانة بالأشكال البيانية لتوضيح فكرة المشكلة القائمة على أساس توزيع المخزون خلال N من السنوات.

أولاً: إن فكرة توزيع المخزون لـ i من السنوات تتضح من خلال الشكل التالي:

الشكل رقم (6-14) توزيع المخزون لـ i من السنوات



ثانياً: فكرة توزيع المخزون لـ N من السنوات تتضح من خلال الشكل رقم (6-15) من الشكل المذكور يمكن وبشكل مباشر استنتاج معادلات الدوال التي تؤدي إلى تحديد سلسلة المتغيرات الأساسية: $y_1 , y_2 , y_3 , ..., y_N$.

حيث أن: $0 \le y_i \le X_i$

$(i = 1, 2 , ..., N)$

والمعادلات هذه هي ما يلي:

$$D_1(X) = Max \{g_N(y_N) + h_N(X_N - y_N)\}$$
$$0 \le y_N \le X_N$$

علماً بأن:

$$X_N = a_{N-1} y_{N-1} + b_{N-1}(X_{N-1} - y_{N-1})$$

$$D_2(X_{N-1}) = Max\ \{g_{N-1}(y_{N-1}) + h_{N-1}(X_{N-1} - y_{N-1}) + D_1(X_N)\}$$
$$0 \le y_N \le X_N$$

علماً بأن:

$$_{N-1}(X_2) = Max\ \{g_2(y_2) + h_2(X_2 - y_2) + D_{N-2}(X_N)\}$$
$$0 \le y_2 \le X_2$$

حيث أن: $X_2 = a_1\ y_1 + b_i\ (X_1 - y_1)$

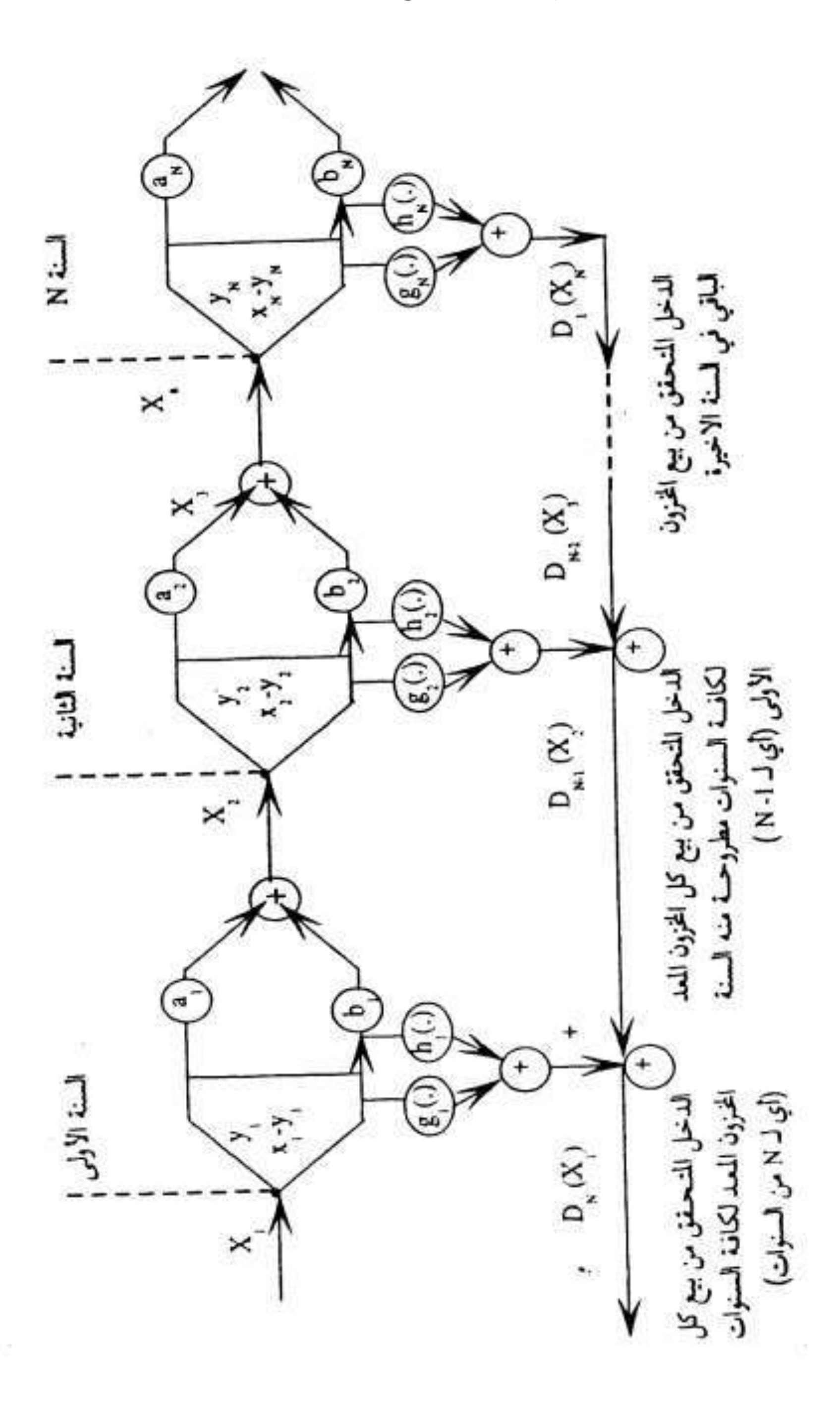
ويحسب الدخل لكافة السنوات (N) كما يلي:

$$D_N(X_1) = D_N(X) = Max\ \{g_1(y_1) + h_1(X_1 - y_1) + D_{N-1}(X_2)\}$$
$$0 \le y_1 \le X$$

حيث أن: $X_1 = N$

مشكلة رقم (2): إحدى منظمات الأعمال الصناعية تملك عدد من المكائن مقدارها N والتي بواسطتها يتم تنفيذ نوعين من العمليات. النوع (X) في المكائن المذكورة خلال مدة سنة تؤدي العملية رقم (1). الدخل الذي تحصل عليه المنظمة من هذه المكائن يتحدد من خلال الدالة g (X). النوع (y) من المكائن المذكورة خلال مدة سنة تؤدي العملية رقم (2). والدخل الذي تحصل عليه المنظمة من هذه المكائن يتحدد من خلال الدالة h (y).

الشكل رقم (6-15) توزيع المخزون لـ N من السنوات

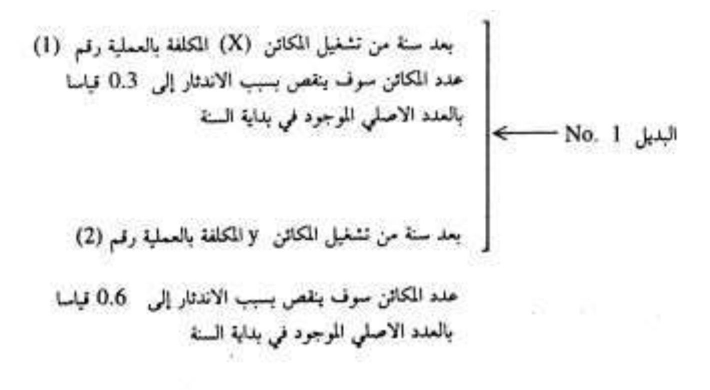


إن الدوال g (X) و h (y) هي دوال محددة وذات قيمة متنامية (أو متصاعدة). من المعروف أن المكائن تستهلك أثناء العمل، وفي المشكلة قيد الدرس، أن (X) من المكائن إذا استخدمت لمدة سنة لتنفيذ العملية رقم (1)، فإن بعد مرور هذه السنة يبقى من تلك المكائن a (X) صالح للعمل. كذلك أن (y) من تلك المكائن إذا استخدمت لمدة سنة لتنفيذ العملية رقم (2) فإن بعد مرور هذه السنة يبقى من تلك المكائن b (y) صالح للعمل.

المطلوب: طلبت المنظمة من القسم الفني في إدارة الإنتاج دراسة المشكلة وتقديم تقريراً حول الموضوع يتضمن ما يلي:

1- سلسلة القرارات $X_1 , X_2 , X_3 , ..., X_N$ التي تؤدي إلى أن يكون الدخل الحاصل من استغلال المكائن للفترة N من السنوات أعلى ما يمكن.

2- وضع صيغة لسلسلة من القرارات المثلى عندما يكون N = 3 مع الأخذ بنظر الاعتبار البدائل التالية:



إن الدخل السنوي الحاصل من تشغيل ماكنة واحدة لتنفيذ العملية رقم (1) يبلغ 0.8 وحدة نقدية.

البديل No. 2

إن الدخل السنوي الحاصل من تشغيل ماكنة واحدة لتنفيذ العملية رقم (2) يبلغ 0.5 وحدة نقدية.

الحل: لحل هذه المشكلة يتطلب الأمر صياغة النموذج الرياضي الذي يستوعب متطلبات تقرير القسم الفني في إدارة الإنتاج. كما أن صياغة النموذج الرياضي يتطلب وضع الافتراضات التالية:

X_i (حيث أن: $i = 1 , 2 , ..., N$) عدد المكائن التي تنفذ العملية رقم (1) خلال (i) من السنوات.

y_i (حيث أن: $i = 1 , 2 , ..., N$) عدد المكائن التي تنفذ العملية رقم (2) خلال (i) من السنوات.

n_i (حيث أن: $i = 1 , 2 , ..., N$) عدد المكائن الصالحة في بداية (i) من السنوات.

علماً بأن: $X_i + y_i$

ومنه يستنتج بأن: $y_i =- n_i – X_i$

وبناءاً على ما تقدم فإن في بداية السنة عندما X_1 من المكائن تنفذ العملية رقم (1) و (y_1) من المكائن تنفيذ العملية رقم (2) فإن الدخل يبلغ.

$$g (X_1) + h (y_1) = g (X_1) + h (n_1- X_1)$$

بعد السنة الأولى يكون عدد المكائن الصالحة للعمل كما يلي:

$$n_2 = a (X_1) + b (y_1) = a (X_1) + b (n_1 - X_1)$$

عدد المكائن n_1 الصالحة للعمل في السنة الثانية يتم تقسيمها إلى مجموعتين، الأولى X_2 والثانية y_2 وذلك لتنفيذ العملية رقم (1) ورقم (2). فإن الدخل في السنة الثانية يبلغ:

$$g (X_1) + h (X_2) = g (X_2) + h (n_2 - X_2)$$

عدد المكائن الصالحة للاستعمال بعد السنة الثانية هي:

$$n_3 = a(X_2) + b(X_2) = a(X_2) + b(n_2 - X_2)$$

وهكذا يتم الاستمرار في وضع مفردات النموذج الرياضي للمشكلة لغاية الحصول على الصيغة التي بموجبها يتم تحديد قيمة الدخل الكلي الحاصل بسبب استغلال المكائن في N من السنوات وهو (الصيغة تحسب بدلالة X_i) كالآتي:

$$D(X_1, X_2, X_3,..,N_3) = g(X_1) + h(n_1 - X_1) + g(X_2) + h(n_2 - X_2) + ...+ g(X_N) + h(n_N - X_N)$$

إن المتغيرات الأساسية للمشكلة يفترض بها أن تحقق الشرط التالي:

$$X_i + y_i = n_1$$

وبناء على ذلك فإن:

$$n_{i+1}\ a(X_i) + b(y_i) = a(X_i + b(n_i - X_i) \quad (i = 1, 2, ..., N-1)$$

حيث أن:

$$0 \leq X_i \leq n_i$$
$$(i = 1, 2, ..., N)$$

إن العلاقة أعلاه تعني أن عدد المكائن المخصصة لتنفيذ العملية رقم (1) لا يمكن أن تكون سالبة ولا يمكن لهذه المكائن أن تكون أكثر من كل ما موجود من المكائن الصالحة للعمل في بداية كل سنة.

بخصوص المطلوب الأول لإعداد تقرير القسم الفني لإدارة الإنتاج فإن الصيغة الرياضية التي تعبر عن هذا المطلب هو:

إيجاد سلسلة القرارات $X_1, X_2, X_3, ..., X_N$

أو القرارات $y_1, y_2, y_3, ..., y_N$

التي تجعل من قيمة الدالة التالية أعلى ما يمكن:

$$D(X_1, X_2, X_3, \ldots. X_N) = \sum_{i=1}^{N} [\, g\,(X_i) + h\,(n_i - X_i)\,]$$

مستوفياً الشروط التالية:

$X_i + y_i = n_i$

$n_i = n$

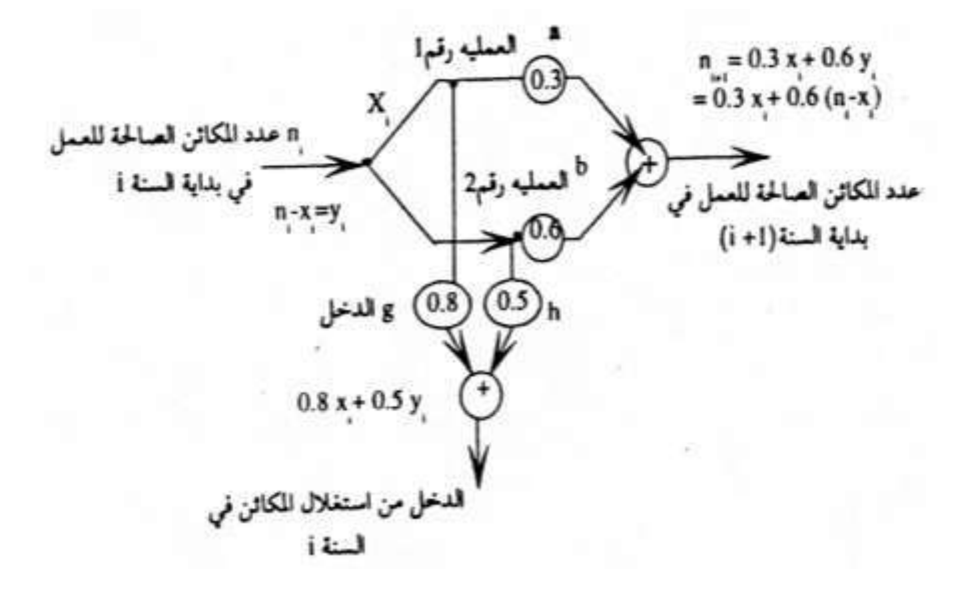
$n_{i+1}\; a\,(X_i) + b\,(y_i) = a\,(X_i + b\,(n_i - X_i) \quad (i = 1\,, 2\,, \ldots., N\text{-}1)$

وكذلك:

$0 \leq X_i \leq n_i \quad (i = 1\,, 2\,, \ldots., N\text{-}1)$

بالنسبة للمطلب الثاني حدد القسم الفني الافتراضات وكذلك الشكل (6–12) الذي يوضح تحديد عدد المكائن الصالحة للعمل في بداية كل سنة.

شكل رقم (6–16) تحديد عدد المكائن الصالحة للعمل في بداية كل سنة



على افتراض أن F_i (n) هو أقصى ما يمكن الحصول عليه من الدخل الكلي نتيجتاً لاستغلال N من المكائن ولمدة I من السنوات. ولو تم استخدام ذلك في الشكل أعلاه مع الاستعانة بالمفاهيم الأساسية للبرمجة الديناميكية فإن بالمستطاع وضع الشكل (6-17) وذلك لمدة ثلاث سنوات.

على أساس الشكل رقم (6-17) يمكن أن نتوصل إلى تحديد القيم المثلى للمتغيرات الأساسية وذلك كما يلي:

الشكل رقم (6-17) تحديد القيم المثلى للمتغيرات الأساسية

بالنسبة لـ X_3 يكون لدينا ما يلي:

$$F_1 (n_3) = Max \{0.8 X_3 + 0.5 (n_3 - X_3)\}$$
$$0 \leq X_3 \leq n_3$$

علماً بأن: $0.3 X_2 + 0.6 (n_2 – X_2) = n_3$.

بالنسبة لـ X_2 يكون لدينا ما يلي:

$$F_2 (n_2) = Max \{0.8 X_2 + 0.5 (n_2 – X_2) + F_i (n_2) \}$$
$$0 \leq X_2 \leq n_2$$

علماً بأن: $0.3 X_1 + 0.6 (n_1 – X_1) = n_2$.

بالنسبة لـ X_1 يكون لدينا ما يلي:

$$F_1 (n_3) = Max \{0.8 X_3 + 0.5 (n_3 – X_3) + F_2 (n_2) \}$$
$$0 \leq X_1 \leq n_1$$

علماً بأن: $n_1 = n$

الخطوة التالية هو عملية حساب القيمة المثلى للمتغيرات الأساسية ، ولنبدأ بالمتغير X_3.

بالنسبة للمتغير X_3 لدينا ما يلي:

$$F_1 (n_3) = Max \{0.8 X_3 + 0.5 (n_3 - X_3)\}$$
$$0 \leq X_3 \leq n_3$$
$$= Max \{0.8 X_3 + 0.5 n_3 - 0.5 X_3)\}$$
$$0 \leq X_3 \leq n_3$$
$$= Max \{0.3 X_3 + 0.5 n_3)\} F_1 (n_3) = Z_1$$
$$0 \leq X_1 \leq n_1$$

يمكن كتابة ذلك بصيغة دالة

$$Z_1 = 0.3\ X_3 + 0.5\ n_3$$

وإن هذه الدالة هي دالة متناهية بالنسبة لـ X3

لذلك فإن من مصلحة متخذ القرار أن تكون قيمة $X_3 \longrightarrow \left. \begin{matrix} X_3 < n_3 \\ X_3 = n_3 \end{matrix} \right\}$

(حيث أن: $X_3 \leq n_3$)

وبذلك فإن: $Z_1 = F_1\ (n_3) = 0.8\ n_3$

بالنسبة للمتغير X_2 لدينا ما يلي:

$$F_2\ (n_2) = Max\ \{0.8\ X_2 + 0.5\ (n_2 - X_2) + F_1\ (n_2)\ \}$$
$$0 \leq X_2 \leq n_2$$

$$= Max\ \{0.8\ X_2 + 0.5(\ n_2 - X_2) + 0.8\ n_3\}$$
$$0 \leq X_2 \leq n_2$$

$$= Max\{0.8\ X_2 + 0.5(\ n_2 - X_2) + 0.8[0.3\ X2 + 0.6\ (n_3 - X_2\ )]\}$$
$$0 \leq X_2 \leq n_2$$

$$= Max\{0.6\ X_2 + 0.98\ n_2\}$$

$$Z_2 = 0.06\ X_2 + 0.98\ n_2$$

ولما كانت الدالة Z_2 هي دالة متناهية بالنسبة لـ X_2 لـذلك فـإن مـن مصـلحة متخذ القرار أن تكون: $X_2 = n_2$.

وبذلك فإن: $Z_2 = F_2\ (n_2) = 1.04\ n_2$

بالنسبة للمتغير X_1 لدينا ما يلي:

$$F_3\ (n_1) = Max\ \{0.8\ X_2 + 0.5\ (n_1 - X_1) + F_2\ (n_2)\ \}$$
$$0 \leq X_1 \leq n_1$$

$$= Max\{0.8 X_1 + 0.5(n_1 - X_1)+1.04 n_2\}$$

$$=Max\{0.8 X_1+0.5(n_1 - X_1)+1.04[0.3 X_1+ 0.6 (n_1 - X_1)]\}$$

$$0 \leq X_1 \leq n_1$$

$$F_3 (n_1) =Max\{-0.12 X_1+ 1.12 n_1\}$$

$$0 \leq X_1 \leq n_1$$

$$Z_3 = 0.012 X_1 + 1.124 n_1$$

ولما كانت الدالة Z_3 هي دالة متناهية بالنسبة لـ X_1 لـذلك فـإن مـن مصـلحة متخذ القرار أن تكون: $X_1 = 0$.

لذلك فإن: $Z_3 = F_3 (X_1) = 1.124 n_1$

وبناء على ما تقدم فإن المتغيرات الأساسية تأخذ القيم التالية:

$$X_1 = 0, X_2 = n_2 , X_3 = n_1$$

ولما كانت القيم لـ n هي كالآتي:

$$n_1 = n$$

$$n_2 = 0.3 X_1 + 0.6 (n_1 - X_1) = 0.6 n_1 - 0.3 X_1$$

$$n_3 = 0.3 X_2 + 0.6 (n_2 - X_2) = 0.6 n_2 - 0.3 X_2$$

وبالتعويض نحصل على ما يلي:

$$X_1 = 0$$

$$X_2 = n_2 = 0.6 n_1 = 0.6 n$$

$$X_3 = 0.6 . 0.6n - 0.3 . 0.6n = 0.18n$$

من السهل ملاحظة أن تسلسل العمليات سوف يكون بالتنـاظر والتعـويض بين القيم أي أن:

$$n_1 \longrightarrow X_1 \longrightarrow n_2 \longrightarrow X_2 \longrightarrow n_3 \longrightarrow X_3$$

من خلال ما تقدم نستنتج بأن:

القيمة المثلى للدخل الحاصل من العمليات الإنتاجية خلال 3 سنوات يبلغ

وحدة نقدية $F_3 (n_1) = F_3 (n) = 1.124 n$

3.6. النماذج الرياضية المستخدمة في التحليل الزمني للمشروعات

يواجه متخذ القرار في الواقع العملي حالات عديدة يتطلب الأمر فيها إجراء أنواع مختلفة من التحليلات الزمنية وذلك في إطار عمليات تخطيط ومتابعة تنفيذ المشاريع حيث أن متخذ القرار يستطيع السيطرة على عمليات التخطيط المتابعة عند تنفيذ المشروع وذلك من خلال إجراء التحليلات الزمنية اللازمة باستخدام أسلوب المسار الحرج C.P.M والذي يعرف بـ Critical Path Method وكذلك باستخدام أسلوب PERT الذي هو مختصر للمصطلح Project Evaluation and Review Technique. إن كلا الأسلوبين متشابهان وبينهما علاقة متبادلة ويطلق عليهما عادة أسم أسلوب التحليل الشبكي. بموجب هذا الأسلوب يجري التعبير عن مكونات المشروع المطلوب تنفيذه من خلال عدد من النشاطات والأحداث حيث جرت العادة على تمثل النشاطات باستخدام الأسهم والدوائر والمربعات، ويتبين على كل نشاط البيانات المتعلقة به والتي تشمل زمن الإنجاز، الموارد البشرية والمادية المطلوب وغير ذلك[1].

([1]) لمزيد من التفاصيل حول هذا الموضوع، ننصح القارئ الكريم بالرجوع إلى مؤلفنا الموسوم:
" تقييم وإدارة المشروعات المتوسطة والكبيرة" إصدار مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان 2008.

أسئلة وتمارين الفصل السادس

س1: ما المقصود بالبرمجة الديناميكية، وبماذا تختلف عن البرمجة الخطية Linear Programming

س2: ما هو تفسيرك للعلاقة الرياضية التالية:

$$S_{t+1} = F\,(S_t, d_{t+1})$$

س3: اذكر أنواع نماذج البرمجة الديناميكية المستخدمة في اتخاذ القرار الأمثل.

س4: كيف يتم تحليل النموذج الرياضي التالي:

$$F\ (X_1 , X_2 , \ldots, X_n, \ldots, X_N) = g_1\,(X_1) + g_2\,(X_2) + \ldots + g_n\,(X_n) + \ldots + g_N\,(X_N)$$

التي تحقق الشروط التالية:

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots + X_N = a$$

س5: ما هي العلاقة بين نماذج التحليل الشبكي ونماذج البرمجة الديناميكية؟

س6: هل أن النموذج الرياضي:

$$ET_j = Max\begin{bmatrix} ET_i + t_{ij} \\ ET_i + t_{ij} \\ \vdots \quad\quad \vdots \end{bmatrix}$$

هو من النماذج الديناميكية؟

المصــادر

أولاً: المصادر العربية:

1. أبو حمد، رضا صاحب، لمحات معاصرة في الإدارة، مؤسسة الوراق للنشر، الأردن، عمان، 2001.
2. البيلاتي، شمعون كدر كيس، السيطرة النوعية والمواصفات القياسية، دار الكتب، العراق، 1988.
3. جابر، عدنان فتحي، حسن، ضويه سلمان، مقدمة في بحوث العمليات، بيت الحكمة، بغداد 1988.
4. جزاع، عبد ذياب، بحوث العمليات، بغداد 1987.
5. زويلف، مهدي حسن، نزار عبد المجيد، الأساليب الكمية في الإدارة، مطابع دار الحكمة للطباعة والنشر، بغداد 1990.
6. زيارة، فريد فهمي، الأصول والمبادئ، دار الشعب، الأردن، اربد، 2001.
7. سالم، فؤاد الشيخ، د. فالح محمد حسن، بحوث العمليات نظرية وتطبيق، دار مجدلاوي للنشر والتوزيع – الأردن، عمان 1983.
8. الشكرجي، نعمة، المدخل في وظائف المنشأة، مطبعة عصام بغداد 1976.
9. الشماع، الدكتور خليل محمد حسين، وآخرون، مبادئ الإدارة، مطبعة جامعة بغداد، بغداد 1980.
10. الشيباني، إلهام ناظم، استخدام بعض الأساليب الكمية في تخطيط مدخلات ومخرجات العملية الإنتاجية، أطروحة ماجستير مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة الكوفة، سنة 2002.
11. الطائي، يوسف جحيم، أثر تطبيقات إدارة الجودة الشاملة في الكفاءة الإنتاجي لتحقيق الأمثلية – نموذج مقترح للشركة العامة لصناعة الإطارات، أطروحة دكتوراه مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد وفي الجامعة المستنصرية، سنة 2001.

12. غني، إقبال، المفاضلة بين الأساليب الكمية لاختيار نظام تخطيط موارد الإنتاج، أطروحة ماجستير مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد وفي جامعة الكوفة، سنة 2001.
13. الفضل، مؤيد عبد الحسين، "الإبداع في اتخاذ القرارات – منهج كمي"، إصدار مؤسسة إثراء للنشر والتوزيع، عمان، 2008.
14. الفضل، مؤيد عبد الحسين، "نظريات اتخاذ القرار – منهج كمي"، إصدار مؤسسة المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2005.
15. الفضل، مؤيد عبد الحسين، استخدام نظام مستوى الطلبية الاحتمالي في معالجة المشاكل المخزنية، بحث أطروحة الماجستير للطالب محمد أمين، وهو مقبول للنشر في مجلة أبحاث للعلوم الإنسانية لجامعة صلاح الدين، رقم الكتاب (210) في 20/ 6/ 1990.
16. الفضل، مؤيد عبد الحسين، الأساليب الكمية، نماذج كمية وتطبيقاتها في تخطيط الإنتاج، دار مجدلاوي للنشر، الأردن، عمان، 2004.
17. الفضل، مؤيد عبد الحسين، الطائي، حجيم، يوسف، إدارة الجودة الشاملة من المستهلك إلى المستهلك، دار الوراق للنشر، الأردن، عمان، 2004.
18. الفضل، مؤيد عبد الحسين، العلاقة بين تبسيط جوردن وطريقة السمبلكس الاعتيادية ودورها في حل مشاكل البرمجة الخطية، بحث مقبول للنشر في وقائع المؤتمر العلمي الثاني في جامعة صلاح الدين في تشرين الأول 1991.
19. الفضل، مؤيد عبد الحسين، وشعبان، عبد الكريم هايل، المحاسبة الإدارية بترشيد القرارات الإدارية، دار زهران للنشر، الأردن، عمان، 2002.
20. الفضل، مؤيد عبد الحسين، وعلي حسين الحديثي، "نمذجة القرارات الإدارية"، إصدار مؤسسة اليازوري، عمان، الأردن، 1999.
21. الفضل، مؤيد محمد علي ونور، عبد الناصر إبراهيم، المحاسبة الإدارية، دار المسيرة للنشر، الأردن، عمان، 2002.
22. الفضل، مؤيد، تقييم وإدارة المشروعات المتوسطة والكبيرة – منهج كمي، إصدار مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان، 2008.

23. قدار، طاهر، رجب، المدخل إلى إدارة الجودة الشاملة والأيزو 9000، الطبعة الأولى، دار المصادر، دمشق، 1998.

24. نجم، عبود نجم، إدارة العمليات، النظم والأساليب والاتجاهات الحديثة، معهد الإدارة العامة/ السعودية – الرياض، 2002.

25. نجم، عبود نجم، المنهج الياباني في إدارة الإنتاج، دار الوراق للنشر، الأردن، عمان، 2004.

26. نجم، عبود نجم، مدخل إلى الأساليب الكمية، نماذج تطبيقات، مؤسسة الوراق للنشر، الأردن، عمان، 2004.

27. هيزا، بدر خان السندي، تخطيط الإنتاج باستخدام التحليل الحساسي، أطروحة ماجستير مقدمة إلى مجلس كلية الإدارة والاقتصاد في جامعة الكوفة، 1998.

ثانياً: المصادر الأجنبية

1- المصادر باللغة الإنجليزية

1. A.V. Sposito, Linear an Non-Linear Programming Iowa sduda University Press, London, 1975.
2. Adam, Everrett E. & Ebert, Ronald, J., Production and Operation Management, 5th ed., Prentice-Hall of India, New Delhi, 2005.
3. Anderson D.R., An Introduction to Management, Science, Ohio, South-Western, 2003.
4. Anupindi R. & S. Chopra, Managing Business Process Flows, PEVE, Prentice Hall, New York, 1999.
5. Bonin C.P., Hausman, W.H., Berman H., Quantitative Analysis for Management, McGraw Hill, Irwin, New York, 2003.
6. Brown Jimmie, Et at "Production Management Systems", An interacted perspective: 2nd Ed., Addison-Wesley, 2000.
7. Browne, Jimmie, Harben, John, and Shiman, James, Production Management Systems UK. Addison/Wely Publishing Company, 1989.
8. C.A. Gaughor H. J. Waston, Guantitative Method for Business Decisions, Mc Graw-Hill Inc, 1980.
9. Dilworth, James, P., Production and Operations Management, 6th ed., Ny McGraw Hill Publishing Co., 2003.
10. E.Naddor, Inventory Ssytems, Johnwiley and Sons, Inc. New York, 1966.
11. F.S. Hillier, G.J. Lieberman, Operations Research, 2 ed., Holden Day. Inc, 1974.
12. G. Hadley. Linear Programming, Addison Wesley Publishing Company, New York, 1978.

13. Gohen, Steven and Brand Ronal, Total Quality Management, A practical Guide for the real world, San – Francisco, Yossey – Bass Publishes, 1993.
14. Gopikutlan, G., Quantitive Methods and Operation Firsted, New York, 1987.
15. Grost by, B. Leon, The just – in – time manufactory process, control of quality and quantity production and inventory management, New York, 1999.
16. H.A. Taha, Operations Research – an Introduction, 5th ed. Macmillion Publishing Co. Inc New York, 1994.
17. Jedrzeijczyk Z., Skrzypek J., Badania Opeacyine Wprzykcadach: Zadaniah, PWN, W-wa, 2000.
18. Karamr Kar, Uday, Getting control of just – in time, Harvard Business Review, No, S, September, 1989.
19. Krajewski L.J. & L.P. Ritzman, Operations Management, McGraw Hall, New York, 2002.
20. Krajewski, Y, Lee, Ritzman, P. Larrt, Operation Management – strategy and analysis, 7th ed., on Wesley Publishing Company, New York, 2007.
21. McGraw, Stevenson W.J., Production Operations Management, Irwin New York, 2005.
22. OzEffy, Management Information System, C. Tch, Canada, 2002.
23. P.K. Gupta, D.S. Hira, Operations, Research Chand and Co. (PVE) LTD, New Delhi, 1987.
24. R. Bellman, S. E. Dreyfusc, Applied Dynamic Programming, Princeton. Press, Princeton N. J. 1962.
25. R. Bronson, Operations Research, Me Graw-Hill Book Company, New York, 1982.
26. R. I. Leviny C. A. Kirkpatrick/ D.S. Rubin Quantitative Approaches to Management J. S. E, Me Graw-Hill Inc Tokyo, 1982.
27. Rarlin, R.C., Optimization in Operations Research, P.E. India, 1998.
28. Riggs, L. James, Production systems planning analysis and control, N.Y., Jogh Willey & Sons, 2003.
29. Rinder, B., Management Decision Modeling, P.E. Inc. New Jersey, 2003.
30. Russell, Eobertas & Yaylor, Bernard W., Production and Operation Management, Focusing on Quality and Competitiveness, Prentice – Hall, Inc. 2004.
31. Schroder, G, Roger, Operations Management, decision making in the operations functions, zed, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 2004.
32. Slack, Niget et al. Operations Management, 2nd ed., Pitman, New York, 2006.

2- المصادر باللغة البولندية

1. C.H. Mitchell, Badania Operacylne – metodyi przyktady, WN-T, W-Wa, 1977.
2. D.Ragalska, Programowanie Liniowe – Algorgtmyi Zadania UN Jo, DZ, 1983.
3. H. M. Wagner, Badania Operayine – Zastosowqnia W Zar-Zadzaniu, (PWE), W-Wa, 1975.
4. H.K. Rinski, A. Badach, Zastosowaniq Matematyki, do. Podejmowania decyzji ekonumieznyck, PWN, W-Wa, 1976.
5. Nykowski, Programowanie Liniowe (PWE), W-Wa, 1980.

6. O. Longe, Optymalne decyzje, W- Wa, 1964.
7. Ross, A. Webber, Zasady Zarzadzania Oraganizcjami, Pwe, W-Wa, 1984.
8. S. I. Gass, Programowanie Lineowe (PWN), W-Wa, 1980.
9. W. Garbowsski, Programowanie Matematyezne (PWN), W-Wa, 1980.
10. W. Radzi Kowski, Matematyeznc Techniki Zarzaaelzania' PwE, E-Wa, 1980.
11. W. Sadowski, Teoria Pode Jmowania deczji, PWE, W-Wa, 1961.
12. Z. Czerwinsla, Matematykana Ustguch Elconomil, (PWN), W-Wa, 1969.